Divisibilité – Nombres Premiers entre Eux – Algorithme d'Euclide

p premier $\Leftrightarrow$ p admet pour seuls diviseurs $\{ 1 ; p \}$.

Décomposition en facteurs premiers

Tout entier naturel n se décompose de façon unique en produit de facteurs premiers : $n = p_1^{\alpha_1} \times p_2^{\alpha_2} \times \ldots\ldots \times p_n^{\alpha_n}$.

n admet $N = (\alpha_1 + 1)(\alpha_2 + 1)\ldots\ldots(\alpha_n + 1)$ **diviseurs** distincts, de 1 à p lui-même.

PGCD – PPMC – Produit de deux nombres entiers : Si $a = p_1^{\alpha_1} \times p_2^{\alpha_2} \times \ldots\ldots \times p_n^{\alpha_n}$ et $b = p_1^{\beta_1} \times p_2^{\beta_2} \times \ldots\ldots \times pn^{\beta_n}$,

alors $\mathbf{PGCD}(a ; b) = p_1^{\mathrm{Min}(\alpha_1,\beta_1)} \times p_1^{\mathrm{Min}(\alpha_2,\beta_2)} \times \ldots\ldots \times p_n^{\mathrm{Min}(\alpha_n,\beta_n)}$, $\mathbf{PPMC}(a ; b) = p_1^{\mathrm{Max}(\alpha_1,\beta_1)} \times p_1^{\mathrm{Max}(\alpha_2,\beta_2)} \times \ldots\ldots \times p_n^{\mathrm{Max}(\alpha_n,\beta_n)}$.

et $\mathbf{PGCD}(a ; b) \times \mathbf{PPMC}(a ; b) = a \times b$.

$\mathrm{Min}(\alpha ; \beta)$ = Plus petit des deux (minimum) et $\mathrm{Max}(\alpha ; \beta)$ = Plus grand des deux (maximum)

Ainsi : $a = 150 = 2 \times 3 \times 5^2$ et $b = 45 = 3^2 \times 5 \Rightarrow \begin{cases} \mathrm{PGCD}(a , b) = 3 \times 5 = 15 \\ \mathrm{PPMC}\ (a , b) = 2 \times 3^2 \times 5^2 = 450 \end{cases}$. **$\mathbf{PGCD}(a , b) \times \mathbf{PPMC}(a , b) = 15 \times 450 = a \times b = 6.750$.**

L'algorithme d'Euclide des entiers (a , b), avec $a \geq b$, est le tableau des divisions successives de a par b, b par le 1er reste r_1, r_1 par le 2ème reste r_2, ……..,
jusqu'au dernier reste non nul, qui est le **PGCD(a ; b)** .

Recherche de PGCD(150 , 45) : $150 = 3{\times}45 + \underline{\mathbf{15}}$, $45 = 3{\times}15 + 0 \Rightarrow \mathrm{PGCD}(150 , 45) = 15$.

Recherche de PGCD(65 , 18) : $65 = 3{\times}18 + 11$, $18 = 1{\times}11 + 7$, $11 = 1{\times}7 + 4$, $7 = 1{\times}4 + 3$, $4 = 1{\times}3 + \underline{\mathbf{1}}$, $3 = 3{\times}1 + 0$

Deux nombres sont ***premiers entre eux***, si et seulement si 1 est leur seul diviseur commun : **$(a ; b)$ premiers entre eux $\Leftrightarrow$ PGCD(a ; b) = 1 .**

Vidéos **Maths et Tiques (Yvan MONKA)** : **Cours PDF** **Exemple (1)** **Exemple (2)** **Exemple (3)** **Exemple (4)** **Exemple (5)**

Exercices **JMedu** **Enoncés** **e1391** **e2687** **e2592** **e4340** **e1227** **Corrigés** **s1391** **s2687** **s2592** **s4340** **s1227**