Division euclidienne - Congruences

b divise exactement a, est noté $b \mid a$ (b divise a), soit $a = b \times q$, avec a, b, q entiers.

Soit a, b entiers, avec $b \leq a$: $a = bq + r$ de façon unique, avec $0 \leq r < b$. (a = dividende, b = diviseur, q = quotient, r = reste).

Deux nombres sont dits ***congrus modulo n*** si et seulement s'ils ont **même reste dans la division par** n.

Notation : $a \equiv b\ [\ n\ ] \Leftrightarrow a, b$ même reste en division par $n \Leftrightarrow a = nq + r$ et $b = nq' + r$.

La congruence est compatible avec l'addition et la multiplication : $a \equiv a'\ [\ n\ ]$ et $b \equiv b'\ [\ n\ ] \Rightarrow a + b \equiv a' + b'\ [\ n\ ]$ et $a \times b \equiv a' \times b'\ [\ n\ ]$

Transitivité : Si $a \equiv b\ [\ n\ ]$ et $b \equiv c\ [\ n\ ]$, alors $a \equiv c\ [\ n\ ]$.

Les congruences modulo n des puissances d'un nombre (restes en division par n) sont cycliques, car le nombre de restes est limité ($0 \leq r < n$).

En division par 5 : $2^1 \equiv 2\ [\ 5\ ]$, $2^2 \equiv 4\ [\ 5\ ]$, $2^3 \equiv 3\ [\ 5\ ]$, $\mathbf{2^4 \equiv 1\ [\ 5\ ]}$ $\Rightarrow$ $2^5 \equiv 2\ [\ 5\ ]$, $2^6 \equiv 4\ [\ 5\ ]$, $2^7 \equiv 3\ [\ 5\ ]$, $2^8 \equiv 1\ [\ 5\ ]$ …

$p = 4k \Rightarrow 2^p \equiv 1\ [\ 5\ ]$, (2^{20} admet un reste 1) et $p = 4k + 1 \Rightarrow 2^p \equiv 2\ [\ 5\ ]$, ($2^{13}$ admet un reste 2) …..

Application :

Pour tout n entier naturel, montrons l'équivalence : $n + 2$ divise $3n^2 + 7n + 13 \Leftrightarrow n + 2$ divise 11

On décompose $3n^2 + 7n + 13$ en puissances de $n + 2$: $3n^2 + 7n + 13 = 3(n^2 + 4n + 4) - 5n + 1 = 3(n^2 + 4n + 4) - 5(n + 2) + 11 = 3(n + 2)^2 - 5(n + 2) + 11$.

En conséquence : $n + 2 \mid 3n^2 + 7n + 13 \Leftrightarrow n + 2 \mid 11$.

Recherche des entiers naturels n tels que $n + 2$ divise 11 .

$n + 2 \mid 11 \Rightarrow n + 2 = 1$ (impossible dans $\mathbb{N}$), ou $n + 2 = 11$, soit $n = 9$, seule solution dans $\mathbb{N}$ de la condition $n + 2 \mid 11$, donc de $n + 2 \mid 3n^2 + 7n + 13$.

Vidéos Maths et Tiques (Yvan MONKA) : Cours PDF Cours Vidéo Exemple (1) Exemple (2) Exemple (3) Exemple (4) Exemple (5)

Exercices JMedu **Enoncés** e1167 e2496 e3851 e1328 e5387 **Corrigés** s1167 s2496 s3851 s1328 s5387