e5009

On pose $A=\begin{pmatrix}3 & 1\\ -2 & 0\end{pmatrix}$, matrice carrée 2×2.

1/ Calculer A^2 et A^3.

2/ Posons $P=\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & -2\end{pmatrix}$.

a) Démontrer que P est inversible, et calculer P^{-1}.

b) Démontrer que la matrice $D=P^{-1}AP$ est une matrice diagonale.

c) Démontrer que l'on a $A=PDP^{-1}$.

3/ Démontrer que l'on a $A^n=PD^nP^{-1}$, pour tout $n\in\mathbb{N}$.

En déduire l'expression de A^n, puis vérifier que le résultat obtenu est cohérent avec les résultats du 1/.

e5137

Soit $U_0=\begin{pmatrix}2\\ -2\end{pmatrix}$ et $U_{n+1}=\begin{pmatrix}2 & 3\\ 2 & 1\end{pmatrix}U_n+\begin{pmatrix}-5\\ -4\end{pmatrix}$, pour tout entier naturel $n\geq 0$.

Le but de l'exercice est d'exprimer le vecteur colonne U_n en fonction de n.

1-a) Déterminer le vecteur $A=\begin{pmatrix}a\\ b\end{pmatrix}$ tel qu'en posant $V_n=U_n-A$, on ait $V_{n+1}=\begin{pmatrix}2 & 3\\ 2 & 1\end{pmatrix}V_n$, pour tout $n\geq 0$.

b) Préciser la valeur de V_0.

2/ Déterminer les *valeurs propres* de la matrice $M=\begin{pmatrix}2 & 3\\ 2 & 1\end{pmatrix}$, c'est-à-dire les deux réels α et β non nuls, tels qu'il existe des vecteurs B et C non nuls vérifiant $\begin{cases}M\times B=\alpha.B\\ M\times C=\beta.C\end{cases}$, puis proposer deux vecteurs propres B et C correspondants.

3/ Soit P la matrice dont les deux colonnes sont B et C, que l'on notera $P=[B\,;C]$.

Vérifier que P est inversible, puis calculer P^{-1}.

4-a) Calculer $N=P^{-1}\times M\times P$. Que constate-t-on ?

b) Démontrer par récurrence que N diagonale implique N^n diagonale, et exprimer N^n en fonction de N.

5-a) Prouver que $N=P^{-1}\times M\times P$ implique $M=P\times N\times P^{-1}$.

b) Démontrer par récurrence que $M=P\times N\times P^{-1}$ implique $M^n=P\times N^n\times P^{-1}$, pour $n\in\mathbb{N}$.

c) Calculer M^n en fonction de n.

d) En déduire V_n puis U_n en fonction de n.

e5010

Pour tout entier naturel n, on définit les suites numériques (a_n) et (b_n) par $\begin{cases}a_0=1\ ,\ b_0=0\\ a_{n+1}=a_n+b_n\\ b_{n+1}=2a_n\end{cases}$.

Dans cet exercice, nous allons déterminer une expression explicite du terme général de chacune de ces deux suites.

<u>Approche 1 – Matricielle</u> :

1/ Ecrire le système précédent sous la forme $M.U_n=U_{n+1}$, avec $U_n=\begin{pmatrix}a_n\\ b_n\end{pmatrix}$, $U_{n+1}=\begin{pmatrix}a_{n+1}\\ b_{n+1}\end{pmatrix}$ et M une matrice 2×2 à déterminer.

2/ Démontrer par récurrence que $U_n=M^n.U_0$.

3/ Pour déterminer l'écriture fonctionnelle de a_n et b_n (terme général), il faut appliquer le résultat précédent, donc connaître la matrice M^n.

Le calcul de M^n est vite fastidieux, donc le principe général de ce genre d'exercice, est de déterminer une matrice P, dite de passage, de type 2×2, telle que la matrice $D = PMP^{-1}$ soit diagonale.

On est alors sensé savoir que $M = P^{-1}DP$, et surtout que $M^n = P^{-1}D^nP$.

Il suffit alors de calculer $M^n.U_0 = (P^{-1}D^nP).U_0$ pour connaître U_n et l'écriture générale de a_n et b_n.

Les énoncés proposent généralement une matrice de passage P adaptée, mais nous allons essayer de la déterminer par nous-mêmes.

Soit $P \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ une matrice inversible, donc de *déterminant* $\mathrm{D} = ad - bc$ non nul.

On sait qu'alors sa matrice inverse P^{-1} s'écrit $\begin{pmatrix} \frac{d}{\mathrm{D}} & -\frac{c}{\mathrm{D}} \\ -\frac{b}{\mathrm{D}} & \frac{a}{\mathrm{D}} \end{pmatrix}$. Une matrice diagonale est de forme $\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$.

a) En calculant $D = PMP^{-1}$, vérifier que les conditions requises aboutissent au système $\begin{cases} bd + 2d^2 - b^2 = 0 \\ ac + 2c^2 - a^2 = 0 \end{cases}$.

b) Après avoir constaté que ce système équivaut à $\begin{cases} (b + d)(2d - b) = 0 \\ (a + c)(2c - a) = 0 \end{cases}$, vérifier que sur les quatre systèmes déduits de ce dernier, seuls $\begin{cases} b = -d \\ a = 2c \end{cases}$ ou $\begin{cases} a = -c \\ b = 2d \end{cases}$ peuvent être retenus. (On choisira $\begin{cases} a = -c \\ b = 2d \end{cases}$).

c) Vérifier que la matrice $P = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ convient, puis calculer $D = PMP^{-1}$.

d) Calculer D^n, puis M^n, et en déduire les écritures de a_n et b_n en fonction de n.

Approche 2 – Suites :

L'objectif est, à partir des formes $\begin{cases} a_0 = 1 \text{ , } b_0 = 0 \\ a_{n+1} = a_n + b_n \\ b_{n+1} = 2a_n \end{cases}$, de déterminer des suites numériques annexes, qui permettent le calcul direct de a_n et b_n.

1/ Démontrer que $b_{n+1} - a_{n+1} = -(b_n - a_n)$.

2/ En déduire que $b_n - a_n = (-1)^{n+1}$, puis que $a_{n+1} = 2a_n - (-1)^n$.

3/ On pose $u_n = a_n - \frac{(-1)^n}{3}$, avec α réel.

a) Montrer que $u_{n+1} = 2u_n$. En déduire l'écriture de u_n en fonction de n.

b) Déduire ensuite les écritures respectives de a_n et b_n en fonction de n.

e5023

Dans une population de souris femelles, chaque souris femelle donne naissance à une femelle durant sa première année de vie, et à huit femelles pendant sa deuxième année de vie.

D'autre part, une souris meure à la fin de la première année dans 75% des cas.

Dans tous les cas elle n'a aucune chance de survivre au-delà de la deuxième année.

On note a_n le nombre de souris femelles juvéniles (âgées de moins d'un an), b_n le nombre de souris femelles adultes (âgées entre un an et deux ans), et c_n le nombre total de souris femelles dans la population étudiée à l'instant n (supposé entier).

On suppose qu'il y a 20 souris femelles juvéniles et aucune souris femelle adulte à l'instant 0.

1/ Que valent a_0 et b_0 ?

2/ Montrer que pour tout entier naturel n, on a $\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}$, avec $A = \begin{pmatrix} 1 & 8 \\ 0{,}25 & 0 \end{pmatrix}$.

3/ Soit $P = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0{,}25 & 0{,}25 \end{pmatrix}$. Sans calculatrice, déterminer P^{-1}, puis $D = P^{-1}AP$.

4/ En déduire alors que $A = PDP^{-1}$.

5/ Exprimer D_n en fonction de n .

6/ Montrer par récurrence que pour tout $n \geq 1$, on a $A^n = PD^nP^{-1}$, puis déduire A_n en fonction de n .

7/ Montrer par récurrence que pour tout $n \geq 1$, on a $\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \end{pmatrix}$.

Calculer alors à la calculatrice les populations de souris à l'instant 10 .

8/ Exprimer enfin a_n et b_n en fonction de n . Déterminer l'expression de c_n en fonction de n .

9/ Quelle est la limite des suites (a_n) , (b_n) et (c_n) ? Interpréter ces résultats.

10/ Déterminer la limite quand n tend vers l'infini de $\dfrac{a_n}{c_n}$, puis de $\dfrac{b_n}{c_n}$ et $\dfrac{c_{n+1}}{c_n}$. Interpréter ces résultats.

e5363

Un pisciculteur dispose de deux bassins A et B pour l'élevage de ses poissons. Tous les ans, à la même période :

- Il vide le bassin B et vend tous les poissons qu'il contenait, puis il transfère tous les poissons du bassin A dans le bassin B ;
- La vente de chaque poisson permet l'achat de deux poissons destinés au bassin A.

Par ailleurs, le pisciculteur achète 200 poissons supplémentaires pour le bassin A , et 100 poissons pour le bassin B .

Pour tout entier naturel $n \geq 1$, on note respectivement a_n et b_n les effectifs de poissons des bassins A et B au bout de n années.

En début de première année, le nombre de poissons du bassin A est $a_0 = 200$ et celui du bassin B est $b_0 = 100$.

1/ Justifier que $a_1 = 400$ et $b_0 = 300$, puis calculer a_2 et b_2 .

2/ On désigne par A et B les matrices telles que $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 200 \\ 100 \end{pmatrix}$, et pour tout entier naturel n , $X_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}$.

a) Expliquer pourquoi, pour tout entier naturel n , $X_{n+1} = AX_n + B$.

b) Déterminer les réels x et y tels que $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + B$.

c) Pour tout entier naturel n , on pose $Y_n = \begin{pmatrix} a_n + 400 \\ b_n + 300 \end{pmatrix}$.

Démontrer que, pour tout entier naturel n , $Y_{n+1} = AY_n$.

3/ Pour tout entier naturel n , on pose $Z_n = Y_{2n}$.

a) Démontrer que, pour tout entier naturel n , $Z_{n+1} = A^2Z_n$. En déduire que pour tout entier naturel n , $Z_{n+1} = 2Z_n$.

b) On admet que cette relation de récurrence permet de conclure que, pour tout entier naturel n , $Y_{2n} = 2^nY_0$.

En déduire que $Y_{2n+1} = 2^nY_1$, puis démontrer que, pour tout entier naturel n :

$$a_{2n} = 600\times2^n - 400 \quad \text{et} \quad a_{2n+1} = 800\times2^n - 400 .$$

4/ Le bassin A a une capacité limitée à 10 000 poissons.

a) On donne l'algorithme suivant :

Variables :	a, p et n sont des entiers naturels.
Initialisation :	Demander à l'utilisateur la valeur de p.
Traitement :	Si p est pair
	Affecter à n la valeur $\dfrac{p}{2}$
	Affecter à a la valeur $600 \times 2^n - 400$.
	Sinon
	Affecter à n la valeur $\dfrac{p-1}{2}$
	Affecter à a la valeur $800 \times 2^n - 400$.
	Fin de Si.
Sortie :	Afficher a.

Que fait cet algorithme ? Justifier la réponse.

b) Ecrire un algorithme qui affiche le nombre d'années pendant lequel le pisciculteur pourra utiliser le bassin A .

c) Déterminer, par le calcul, ce nombre d'années.

e5133

Soit la matrice carrée $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 6 & -5 & 6 \\ 3 & -3 & 4 \end{pmatrix}$.

1/ Montrer qu'il existe une suite (a_n) telle que, pour tout entier naturel n, on ait $A^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2a_n & 1-2a_n & 2a_n \\ a_n & -a_n & 1+a_n \end{pmatrix}$.

2/ Exprimer a_{n+1} en fonction de a_n, et déterminer a_1.

3/ Déterminer α réel, tel que la suite (b_n) définie par $b_n = a_n - \alpha$ soit géométrique.

4/ Exprimer b_n, puis a_n, en fonction de n.

5/ En déduire A^n en fonction de n.

e5012

On a constaté qu'en un endroit précis du globe, s'il fait beau un certain jour, la probabilité qu'il fasse beau le lendemain est égale à $\frac{1}{3}$, donc qu'il ne fasse pas beau égale à $\frac{2}{3}$.

A l'inverse, s'il ne fait pas beau un certain jour, la probabilité qu'il fasse beau le lendemain est égale à $\frac{3}{4}$, donc qu'il ne fasse à nouveau pas beau égale à $\frac{1}{4}$.

On notera B_n l'évènement « il fera beau dans n jours » et $\overline{B_n}$ celui « il ne fera pas beau dans n jours».

On notera $u_n = p(B_n)$, la probabilité que l'évènement B_n se réalisé, et $v_n = p(\overline{B_n})$, la probabilité que $\overline{B_n}$ se réalise.

On supposera que B_0 est réalisé, donc qu'il fait beau aujourd'hui, soit $u_0 = p(B_0) = 1$.

- Approche par suites numériques :

1-a) Justifier le système suivant : $\begin{cases} u_n + v_n = 1 \\ u_{n+1} = \frac{1}{3} u_n + \frac{3}{4} v_n \\ v_{n+1} = \frac{2}{3} u_n + \frac{1}{4} v_n \end{cases}$, pour tout n entier naturel.

b) En déduire que $u_{n+1} = -\frac{5}{12} u_n + \frac{3}{4}$, pour tout n entier naturel.

2-a) Déterminer le réel α tel que $u_{n+1} - \alpha = -\frac{5}{12}(u_n - \alpha)$.

b) En posant $a_n = u_n - \alpha$, montrer que la suite (a_n) est géométrique puis exprimer a_n et u_n en fonction de n.

c) Déterminer $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = u$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = v$.

d) Expliquer pourquoi $(u\ ;\ v)$ s'appelle *état stable* du système atmosphérique du lieu considéré.

- Approche matricielle :

1/ Etablir le graphe probabiliste correspondant au système étudié.

2/ Soit $U_0 = (u_0\ ;\ v_0)$ l'état probabiliste initial du système, et $U_n = (u_n\ ;\ v_n)$ l'état lors du $n^{\text{ième}}$ jour.

a) Déterminer la matrice M telle que $U_{n+1} = U_n.M$.

b) Démontrer rigoureusement que $U_n = U_0.M^n$, puis calculer U_0.

3/ Soit la matrice de transition $P = \begin{pmatrix} 1 & -8 \\ 1 & 9 \end{pmatrix}$.

a) Déterminer sa matrice inverse P^{-1}, puis vérifier que $D = P^{-1}.M.P$ est une matrice diagonale.

b) Calculer la matrice D^n.

c) Prouver que $D^n = P^{-1}.M^n.P$. d) En déduire M^n, puis calculer $U_n\ (u_n\ ;\ v_n)$.

e) Déterminer $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = u$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = v$, puis montrer que l'état stable $U(u\ ;\ v)$ vérifie $U.M = U$.

e5140

On considère la suite u définie sur $\mathbb{N}$ par la donnée de son premier terme u_0 et la relation de récurrence :

$$u_{n+1} = \frac{1}{2} u_n + 1 \text{ , pour tout entier } n \geq 0 .$$

PARTIE A :

1/ Montrer que, pour tout entier naturel n : $\begin{pmatrix} u_{n+1} \\ 1 \end{pmatrix} = A \times \begin{pmatrix} u_n \\ 1 \end{pmatrix}$, où $A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

2/ Montrer que, pour tout entier naturel n : $A^n = \begin{pmatrix} \left(\frac{1}{2}\right)^n & 2 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

3/ En déduire l'expression de u_n en fonction de u_0 et n.

4/ Discuter la convergence de (u_n) selon la valeur de u_0, et déterminer sa limite.

PARTIE B :

Soit la suite (v_n) telle que $v_n = u_n - a$, avec a réel.

1/ Déterminer a pour que (v_n) soit une suite géométrique, dont on précisera la raison q.

2/ Exprimer v_n puis u_n en fonction de v_0 , u_0 et n.

e5148

Chaque jeune parent utilise chaque mois une seule marque de petits pots pour bébé.

Trois marques X , Y et Z se partagent le marché. Soit n un entier naturel.

On note :

X_n l'évènement « la marque X est utilisée au cours du mois n »,

Y_n l'évènement « la marque Y est utilisée au cours du mois n »,

Z_n l'évènement « la marque Z est utilisée au cours du mois n ».

Les probabilités des évènements X_n , Y_n , Z_n sont respectivement notées x_n , y_n , z_n .

La campagne publicitaire de chaque marque fait évoluer la répartition.

Un acheteur de la marque X au cours du mois n , a le mois suivant :

- 50% de chances de rester fidèle à cette marque,
- 40% de chances d'acheter la marque Y ,
- 10% de chances d'acheter la marque Z .

Un acheteur de la marque Y au cours du mois n , a le mois suivant :

- 30% de chances de rester fidèle à cette marque,
- 50% de chances d'acheter la marque X ,
- 20% de chances d'acheter la marque Z .

Un acheteur de la marque Z au cours du mois n , a le mois suivant :

- 70% de chances de rester fidèle à cette marque,
- 10% de chances d'acheter la marque X ,
- 20% de chances d'acheter la marque Y .

1-a) Exprimer x_{n+1} en fonction de x_n , y_n et z_n .

On admettra que $y_{n+1} = 0,4\, x_n + 0,3\, y_n + 0,2\, z_n$ et $z_{n+1} = 0,1\, x_n + 0,2\, y_n + 0,7\, z_n$.

b) Exprimer z_n en fonction de x_n et y_n . En déduire les expressions de x_{n+1} et y_{n+1} en fonction de x_n et y_n .

2/ On définit la suite (U_n) par $U_n = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$, pour tout entier naturel n.

On admet que $U_{n+1} = A \times U_n + B$, pour tout n entier naturel, avec $A = \begin{pmatrix} 0{,}4 & 0{,}4 \\ 0{,}2 & 0{,}1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0{,}1 \\ 0{,}2 \end{pmatrix}$.

Au début de la statistique (mois de janvier 2014 , $n = 0$) , on estime que $U_0 = \begin{pmatrix} 0{,}5 \\ 0{,}3 \end{pmatrix}$.

On considère l'algorithme suivant :

Variables	n et i des entiers naturels. A, B et U des matrices
Entrée et Initialisation	Demander la valeur de n i prend la valeur 0 A prend la valeur $\begin{pmatrix} 0{,}4 & 0{,}4 \\ 0{,}2 & 0{,}1 \end{pmatrix}$ B prend la valeur $\begin{pmatrix} 0{,}1 \\ 0{,}2 \end{pmatrix}$ U prend la valeur $\begin{pmatrix} 0{,}5 \\ 0{,}3 \end{pmatrix}$
Traitement	Tant que $i < n$ U prend la valeur $A \times U + B$ i prend la valeur $i + 1$ Fin de Tant que
Sortie	Afficher U

e5164

Un laboratoire étudie la propagation d'une maladie sur une population.

Un *individu sain* est un individu n'ayant jamais été touché par la maladie.

Un *individu malade* est un individu qui a été touché par la maladie et non guéri.

Un *individu guéri* est un individu qui a été touché par la maladie et qui a guéri.

Une fois guéri, un individu est immunisé et ne peut plus tomber malade.

Les premières observations nous montrent que, d'un jour au jour suivant :

- 5% des individus tombent malades ;
- 20% des individus guérissent.

Pour tout entier naturel n, on note a_n la proportion d'individus sains n jours après le début de l'expérience, b_n la proportion d'individus malades n jours après le début de l'expérience, et c_n celle d'individus guéris n jours après le début de l'expérience.

On suppose qu'au début de l'expérience, tous les individus sont sains, c'est-à-dire que $a_0 = 1$, $b_0 = 0$ et $c_0 = 0$.

1/ Calculer a_1 , b_1 et c_1 .

2- a) Quelle est la proportion d'individus sains qui restent sains d'un jour au jour suivant ?

En déduire a_{n+1} en fonction de a_n .

b) Exprimer b_{n+1} en fonction de a_n et de b_n .

On admet que $c_{n+1} = 0{,}2b_n + c_n$.

Pour tout entier naturel n , on définit $Un = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}$.

On définit les matrices $A = \begin{pmatrix} 0{,}95 & 0 & 0 \\ 0{,}05 & 0{,}8 & 0 \\ 0 & 0{,}2 & 1 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} 0{,}95 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}8 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

On admet qu'il existe une matrice inversible P telle que $D = P^{-1} \times A \times P$ et que :

pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1 , $A^n = P \times D^n \times P^{-1}$.

3- a) Vérifier que, pour tout entier naturel n , $U_{n+1} = A \times U_n$.

On admet que, pour tout entier naturel n , $U_n = A^n \times U_0$.

b) Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, $D^n = \begin{pmatrix} 0{,}95^n & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}8^n & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

On admet que $A^n = \begin{pmatrix} 0{,}95^n & 0 & 0 \\ \frac{1}{3}(0{,}95^n - 0{,}8^n) & 0{,}8^n & 0 \\ \frac{1}{3}(3 - 4\times 0{,}95^n + 0{,}8^n) & 1 - 0{,}8^n & 1 \end{pmatrix}$.

4- a) Vérifier que pour tout entier naturel n, $b_n = \frac{1}{3}(0{,}95^n - 0{,}8^n)$.

b) Déterminer la limite de la suite (b_n).

c) On admet que la proportion d'individus malades croît pendant plusieurs jours, puis décroît.

On souhaite déterminer le pic épidémique, c'est à dire le moment où la proportion d'individus malades est à son maximum.

A cet effet, on utilise l'algorithme donné en annexe, dans lequel on compare les termes successifs de la suite (b_n).

Compléter l'algorithme de façon qu'il affiche le rang du jour où le pic épidémique est atteint et compléter le tableau fourni en annexe.

```
Variables      :  b, b′, x, y sont des réels
                  k est un entier naturel
                  n est un entier
Initialisation :  Affecter à n la valeur 0
                  Affecter à b′ la valeur 0,05
                  Affecter à k la valeur 0
                  Affecter à x la valeur 0,95
                  Affecter à y la valeur 0,8
Traitement     :  Tant que b < b′ faire :
                     | Affecter à k la valeur k + 1
                     | Affecter à b la valeur b′
                     | Affecter à x la valeur 0,95x
                     | Affecter à y la valeur 0,80y
                     | Affecter à b′ la valeur ······
                  Fin Tant que
Sortie         :  Afficher ······
```

	k	b	c	d	b'	Test : $b < b'$?
Après le 7e passage dans la boucle Tant que	7	0,1628	0,6634	0,1678	0,1652	VRAI
Après le 8e passage éventuel dans la boucle Tant que						
Après le 9e passage éventuel dans la boucle Tant que						

e5165

Lester Hill (mathématicien américain, 1891-1961) a publié en 1929 une méthode de chiffrement dite polygraphique, où il ne s'agit pas de coder un message lettre par lettre, mais par « paquets » de 2 lettres.

Partie A – Chiffrement

On associe à chaque lettre de l'alphabet un nombre compris entre 0 et 25 (A = 0 , B = 1 , ... , Z = 25).

On se donne la matrice carrée d'ordre 2 suivante : $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$.

Soit x_1 et x_2 les nombres entiers (compris entre 0 et 25) associés aux deux premières lettres du message ROCK à coder.

On remplace ces deux lettres par celles associées aux nombres entiers y_1 et y_2 (eux aussi compris entre 0 et 25) définis par les congruences suivantes : $\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \equiv A \times \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ [26] c'est-à-dire $\begin{cases} y_1 \equiv 3x_1 + x_2 \; [26] \\ y_2 \equiv 4x_1 + 3x_2 \; [26] \end{cases}$.

On associe maintenant aux entiers y_1 et y_2 les lettres dont le code ASCII est $65 + y_1$ et $65 + y_2$.

On sait que : ASCII (A) = 65 , ASCII (B) = 66 , …. , ASCII (Z) = 90 , ou CAR (65) = A , CAR (66) = B , …. , CAR (90) = Z .

On procède de même pour les deux lettres suivantes.

On obtient ainsi le chiffrement du mot ROCK, que l'on déterminera.

Partie B – Déchiffrement

Supposons que le message codé soit PSRC .

1/ Vérifier que la matrice inverse de A est $A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & -\frac{1}{5} \\ -\frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix}$, notée $A^{-1} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}$.

2/ Expliquer pourquoi $\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \equiv A \times \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ [26] n'entraîne pas $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \equiv A^{-1} \times \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ [26] .

3-a) Justifier qu'il ne peut exister deux entiers non égaux a et b, compris entre 0 et 25 , tels que $5 \times b \equiv 5 \times a$ [26] .

b) En déduire qu'il existe un entier a unique entre 0 et 25 tel que $5 \times a \equiv 1$ [26] .

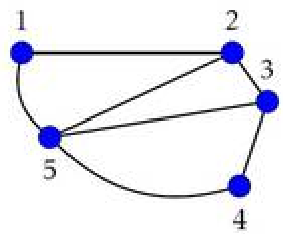
c) Déterminer a .

4/ En déduire que la matrice $B = \begin{pmatrix} 11 & 5 \\ 20 & 11 \end{pmatrix}$ vérifie $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \equiv B \times \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ [26] .

5/ Terminer le déchiffrement du mot proposé (*aide : Pays du whisky*)

e5020

Chaque matin, parmi 5 élèves d'une même classe de Terminale, certains se serrent la main, et d'autres non, selon le graphe ci-dessous.



On définit la matrice A des poignées de mains comme suit : l'élément a_{ij} de A vaut 1 si l'élève i a serré la main de l'élève j .

1) Quelle est l'ordre de A ? 2) Pourquoi a-t-on $a_{ii} = 0$ pour tout i entre 1 et 5 ?

3) Pourquoi a-t-on $a_{ij} = a_{ji}$ pour tout i et j distincts entre 1 et 5 ? 4) Donner la matrice A .

5) A partir de A , comment peut-on savoir si un élève a serré la main à quelqu'un ? à personne ? à tout le monde ?

e5021

Une matrice magique est une matrice carrée d'ordre n prenant comme coefficients des entiers distincts et telle que les sommes des lignes, des colonnes et des diagonales soient toutes identiques.

1) Vérifier que $A = \begin{pmatrix} 8 & 3 & 4 \\ 1 & 5 & 9 \\ 6 & 7 & 2 \end{pmatrix}$ est magique.

2) Soient $t \in \mathbb{N}$ et M une matrice magique. Montrer que $t.M$ est aussi magique.

3) M et N sont deux matrices magiques du même ordre. Montrer que $M + N$ l'est aussi.

4) M et N sont deux matrices magiques du même ordre. Par ailleurs, $t \in \mathbb{N}$ et $s \in \mathbb{N}$.

La matrice $t.M + s.N$ est-elle nécessairement magique ?