Systèmes Linéaires d'Equations à 2 Inconnues.

Exemple : **Résoudre dans $\mathbb{R}$:** $\begin{cases} 3x + y = 3 \\ 2x - 3y = 13 \end{cases}$.

Résoudre un système d'équations à deux inconnues, consiste à déterminer les couples $(x\,;\,y)$ qui vérifient chacune des équations.

Plusieurs méthodes permettent la résolution d'un système de deux équations à deux inconnues :
Par « ***combinaison linéaire*** » , encore appelée « **par addition** » , par « ***substitution*** » , par « ***déterminant*** » .

Méthode par « *combinaison linéaire* » (Conseillée)

On décide d'une inconnue que l'on éliminera par addition, après avoir multiplié l'une ou les deux lignes par des nombres appropriés. On peut alors calculer l'autre inconnue (ici, on élimine les y).

$\left\{\begin{array}{l} 3x + y = 3 \\ 2x - 3y = 13 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \begin{array}{r} 3L_1 \\ L_1 \end{array}\left\{\begin{array}{l} 9x + 3y = 9 \\ 2x - 3y = 13 \end{array}\right\}$. Par addition : $\mathbf{11x = 22} \Leftrightarrow \mathbf{x = +2}$.

Report de $x = +2$ dans une des deux équations : $3x + y = 3 \Rightarrow 6 + y = 3$, soit $\mathbf{y = -3}$.

Le couple solution est : $(x\,,\,y) = (+2\,;\,-3)$.

Méthode par « *substitution* »

On choisit une équation dans laquelle l'une des inconnues se calcule plus aisément *en fonction de l'autre*, et on *substitue* le résultat obtenu dans l'autre équation, l'objectif étant de se retrouver avec une seule inconnue.

$\left\{\begin{array}{l} 3x + y = 3 \\ 2x - 3y = 13 \end{array}\right\}$. **Calculons y en fonction de x dans la première équation** :

$y = 3 - 3x$ que l'on reporte dans $2x - 3y = 13$ devient $2x - 3(3 - 3x) = 13$, soit :

$2x - 9 + 9x = 13 \Leftrightarrow 11x = 22 \Leftrightarrow \mathbf{x = +2}$.

En reportant $x = +2$ dans $y = 3 - 3x$, on obtient $y = 3 - 3 \times 2$, soit $\mathbf{y = -3}$.

Le couple solution est : $(x\,,\,y) = (+2\,;\,-3)$.

Méthode par « *déterminant* »

Soit le système $\left\{\begin{array}{l} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{array}\right\}$.

On appelle ***déterminant général*** *du système*, $D = \begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} = ab' - ba'$.

Les ***déterminants secondaires*** sont obtenus en remplaçant successivement les colonnes $\begin{pmatrix} a \\ a' \end{pmatrix}$ puis $\begin{pmatrix} b \\ b' \end{pmatrix}$ par celle du bout $\begin{pmatrix} c \\ c' \end{pmatrix}$.

On les note alors : $D_x = \begin{vmatrix} c & b \\ c' & b' \end{vmatrix} = cb' - bc'$ et $D_y = \begin{vmatrix} a & c \\ a' & c' \end{vmatrix} = ac' - ca'$.

Si $D \neq 0$, le couple solution unique $(x; y)$ vérifie : $x = \frac{D_x}{D}$ et $y = \frac{D_y}{D}$.

Ainsi $\left\{\begin{array}{l} 3x + y = 3 \\ 2x - 3y = 13 \end{array}\right\} \Rightarrow D = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} = (3)(-3) - (1)(2) = -11$.

$D \neq 0$, donc il y a un couple solution $(x ; y)$ unique.

$D_x = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 13 & -3 \end{vmatrix} = (3)(-3) - (1)(13) = -2$ et $D_y = \begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 2 & 13 \end{vmatrix} = (3)(13) - (3)(2) = +33$.

$x = \frac{D_x}{D} = \frac{-22}{-11} = +2$ et $y = \frac{D_y}{D} = \frac{+33}{-11} = -3$.

Le couple solution unique est : $(x , y) = (+2 ; -3)$.

Lorsque le système présente des fractions numériques, *il est souhaitable de multiplier par le P.P.M.C. des dénominateurs, afin de se débarrasser de ceux-ci avant de résoudre.*

Ainsi : $\left\{\begin{array}{l} \frac{x}{2} - \frac{y}{3} = \frac{1}{2} \\ x + \frac{2y}{3} = -2 \end{array}\right\}$ devient $\begin{array}{l} 6L_1 \\ 3L_2 \end{array} \left\{\begin{array}{l} 3x - 2y = 3 \\ 3x + 2y = -6 \end{array}\right\}$, que l'on résout par l'une des méthodes précédentes.

Certains systèmes imposent un changement de variables :

Ainsi : $\begin{cases} \dfrac{2}{x} - \dfrac{1}{y-2} = 3 \\ \dfrac{1}{x} + \dfrac{2}{y-2} = -1 \end{cases}$ impose le changement de variable suivant : $\begin{cases} X = \dfrac{1}{x} \\ Y = \dfrac{1}{y-2} \end{cases}$.

Il devient $\begin{cases} 2X - Y = 3 \\ X + 2Y = -1 \end{cases}$, qui résolu, donne $(X\,;\,Y) = (+1\,;\,-1)$.

Il faut ensuite, à partir du couple $(X\,;\,Y)$ *trouvé, retrouver le couple* $(x\,;\,y)$ *solution.*

$$\begin{cases} X = \dfrac{1}{x} = +1 \Leftrightarrow x = +1 \\ Y = \dfrac{1}{y-2} = -1 \Leftrightarrow y - 2 = -1 \Leftrightarrow y = +1 \end{cases}.$$

Le couple solution unique est : $(x\,,\,y) = (+1;\,+1)$.

Système de 2 équations à 2 inconnues et intersection de droites affines

Chaque équation d'un système de « 2 équations à 2 inconnues » correspond à une équation de droite affine. Résoudre un système revient à chercher le point d'intersection de deux droites du plan.

Si l'on considère chaque équation du système suivant $\begin{cases} 3x + y = 3 \\ 2x - 3y = 13 \end{cases}$.

(L_1) devient $D_1 \mid y = -3x + 3$ et (L_2) devient $D_2 \mid y = \dfrac{2}{3}x - \dfrac{13}{3}$.

Le couple $(x\,;\,y)$ solution du système est le point $M(x\,;\,y)$ **commun aux droites** D_1 et D_2 .

$M\,(x\,;\,y) \in D_1 \cap D_2 \Leftrightarrow \begin{cases} y = -3x + 3 \\ y = \dfrac{2}{3}x - \dfrac{13}{3} \end{cases} \Leftrightarrow -3x + 3 = \dfrac{2}{3}x - \dfrac{13}{3} \Leftrightarrow -9x + 9 = 2x - 13$,

d'où $-11x = -22$, soit $x = +2$.

En reportant dans l'une des équations de droites, on obtient $y = -3x + 3 = -3\times 2 + 3$, soit $y = -3$.

Le point d'intersection est $A\,(+2\,;\,-3)$ qui correspond à la solution $(x\,;\,y) = (+2\,;\,-3)$ du système.

En conséquence : 3 cas sont possibles

Les droites sont concourantes : Le couple $(x\,;\,y)$ solution est **unique** (point d'intersection unique)

Les droites sont strictement parallèles : **Aucun couple** $(x\,;\,y)$ n'est solution (pas de point d'intersection)

Les droites sont confondues : Il existe une **infinité de couples** $(x\,;\,y)$ solution (ceux de la droite commune).

Systèmes Linéaires d'Equations à 3 Inconnues.

Exemple : **Résoudre dans $\mathbb{R}$:** $\begin{cases} x + y + 2z = 7 \\ 2x - 3y - z = 4 \\ 3x - y + z = 10 \end{cases}$.

On choisit une inconnue à éliminer entre deux couples d'équations :

On élimine z **entre L_1 et L_2** , **puis entre L_2 et L_3** , ce qui nous ramènera à un système de 2 équations à 2 inconnues x et y (Le choix des équations est fait faire des calculs les plus simples possibles).

$$\begin{array}{l} L_1 \\ 2L_2 \end{array}\left\{\begin{array}{l} x + y + 2z = 7 \\ 4x - 6y - 2z = 8 \end{array}\right\} \Rightarrow 5x - 5y = 15 \text{ (par addition) .}$$

$$\begin{array}{l} L_2 \\ L_3 \end{array}\left\{\begin{array}{l} 2x - 3y - z = 4 \\ 3x - y + z = 10 \end{array}\right\} \Rightarrow 5x - 4y = 14 \text{ (par addition) .}$$

Les deux équations obtenues permettent le calcul de $(x\,;\,y)$:

$$\left\{\begin{array}{l} 5x - 5y = 15 \\ 5x - 4y = 14 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} L_1 \\ -L_2 \end{array}\left\{\begin{array}{l} 5x - 5y = 15 \\ -5x + 4y = -14 \end{array}\right\} \text{, d'où, par addition : } -y = +1 \Leftrightarrow y = -1 \text{ .}$$

On reporte $y = -1$ dans $5x - 4y = 14$, soit : $5x + 4 = 14 \Leftrightarrow x = +2$.

On reporte $(x\,;\,y) = (+2\,;\,-1)$ dans l'une des équations à trois inconnues initiales :

$$3x - y + z = 10 \Rightarrow 6 + 1 + z = 10 \Rightarrow z = +3 \text{ .}$$

Le triplet solution unique est $(x\,;\,y\,;\,z) = (+2\,;\,-1\,;\,+3)$.