## Suites Numériques - Forme *fonctionnelle* ou *récurrente*.

On appelle ***suite numérique*** toute fonction $u : n \in \mathbb{N} \to u(n) \in \mathbb{R}$ .

*Autrement dit* : Toute fonction $f$ peut devenir ***suite*** . Il suffit que son domaine de définition soit $\mathbb{N}$ ensemble des entiers naturels.

*Ainsi* :

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que $f(x) = \dfrac{2x-3}{x+1}$ devient $u : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ , telle que $u(n) = \dfrac{2n-3}{n+1}$ .

L'usage veut que l'image $u(n)$ soit notée $u_n$ ( $u$ indice $n$ ) :

$u_0 = -3$ , $u_1 = -\dfrac{1}{2}$ , $u_2 = \dfrac{1}{3}$ , $u_3 = \dfrac{3}{4}$ ……

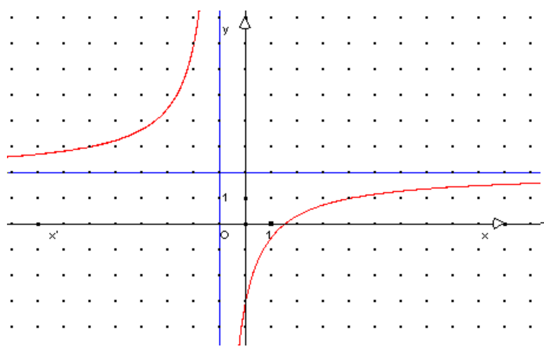
Une *suite* est sous ***forme fonctionnelle*** si la formule proposée pour $u_n$ est directement transposable en écriture « fonction », donc permet le ***calcul immédiat de*** $u_n$ ***pour toute valeur de*** $n$.

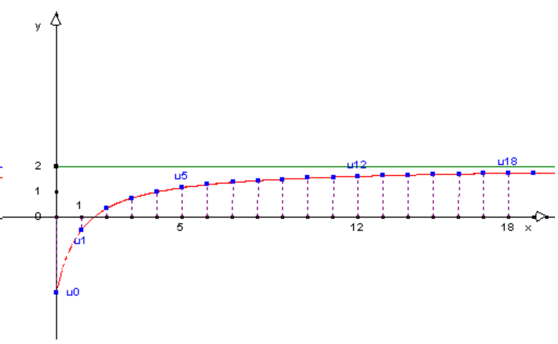
$u_n = \dfrac{2n-3}{n+1}$ est une forme fonctionnelle : $u_{23} = \dfrac{43}{24}$ .

**Graphe d'une suite (courbe représentative) - forme fonctionnelle :** $u_{n+1} = f(n)$ .

A l'identique des fonctions de $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ , une suite numérique possède une représentation graphique, constituée des seuls points d'abscisses entières $x = n$.

*Exemple* : Graphe de $u_n = \dfrac{2n-3}{n+1}$ . On l'extrait de celui de $f(x) = \dfrac{2x-3}{x+1}$ .



Une *suite* est sous ***forme récurrente*** si la formule proposée pour $u_n$ n'est pas directement transposable en écriture « fonction », et ne permet le *calcul de* $u_n$ *que* ***de proche en proche***, à partir des ordres précédents.

$u_n = 2u_{n-1} + 1$ est une forme récurrente.

Chaque terme est le double de celui qui le précède, augmenté de **1**.

Si $u_0 = -3$ , on déduit $u_1 = 2u_0 + 1 = -5$ , $u_2 = 2u_1 + 1 = -9$ , $u_3 = 2u_2 + 1 = -17$ .....

***Pour amorcer une suite récurrente, il faut en connaître un ou plusieurs termes, et la façon de passer d'un ou plusieurs termes de la suite à leur successeur (relation de récurrence).***

La majorité des problèmes de *suites* , consiste à retrouver l'écriture *fonctionnelle* , à partir de l'écriture *récurrente.*

Une suite sous forme récurrente n'étant qu'une autre présentation d'une suite fonctionnelle, elle admet également un graphe, mais il faut calculer, de proche en proche, chaque *ordonnée* $u_n$ pour chaque *abscisse* $n$ .

## Graphe d'une suite (courbe représentative) - forme récurrente :

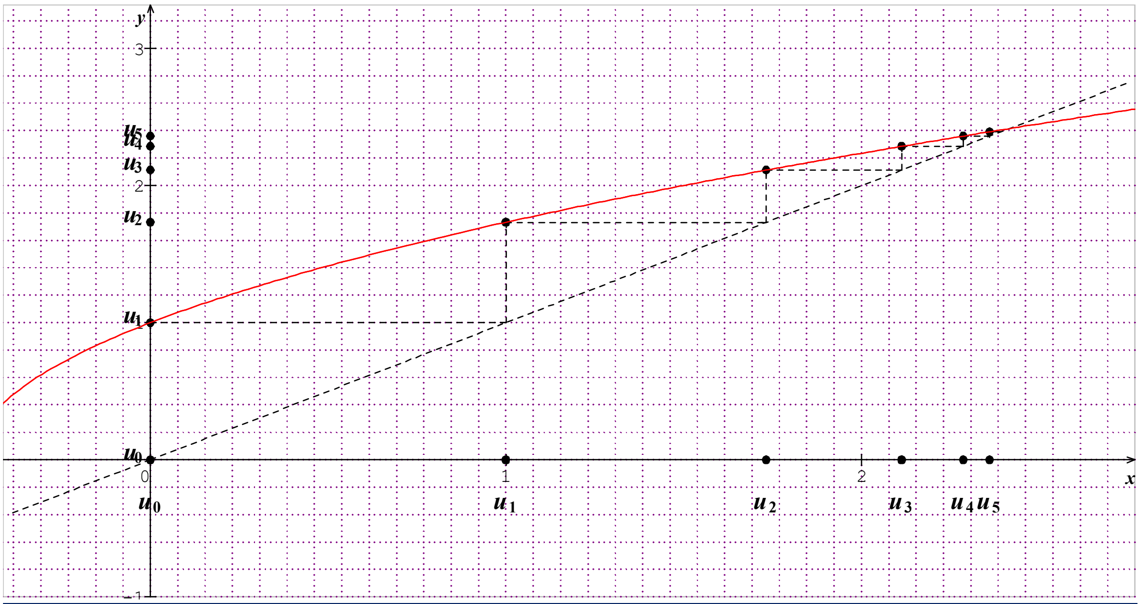
$$u_{n+1} = f(u_n) \text{ + valeur de départ } u_0 \text{ ou } u_1 .$$

On trace le graphe de $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ , ainsi que la 1ère bissectrice des axes $y = x$ .

- Partant de l'abscisse $u_0$ (par exemple), on cherche son ordonnée $u_1 = f(u_0)$ à la verticale, sur $C_f$ .
- On même ensuite l'horizontale jusqu'à couper $y = x$ en $M_1(u_1 ; u_1)$ ( $u_1$ en abscisse et en ordonnée).
- On même ensuite la verticale jusqu'à l' ordonnée $u_2 = f(u_1)$ à la verticale, sur $C_f$ .
- On même ensuite l'horizontale jusqu'à couper $y = x$ en $M_2(u_2 ; u_2)$ ( $u_2$ en abscisse et en ordonnée).
- On réitère le processus pour les autres valeurs de $u_n$ .

On peut éventuellement constater que les valeurs de $u_n$ s'accumulent au point $E(L\,;L)$ d'intersection entre $C_f$ et la bissectrice $y = x$. On peut alors affirmer $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = L$.

<u>*Exemple :*</u> Soit la suite $u$ telle que $u_{n+1} = \sqrt{2u_n + 1}$, avec $u_0 = 0$. Tracer la courbe représentative de $u$ :




On constate que la suite $u$ est <u>***croissante***</u>, <u>***bornée***</u> ***par*** $0$ ***et*** $L = 1 + \sqrt{2}$ <u>***limite de la suite,***</u> ***solution de*** $f(x) = x$.

## <u>Suite monotone :</u>

Une suite numérique est dite ***monotone*** (croissante ou décroissante) si la progression de ses termes successifs l'est, c'est à dire ne s'inverse jamais.

| |
|---|
| $u$ ***croissante*** $\Leftrightarrow$ $u_{n+1} \geq u_n$ pour tout $n$ $\Leftrightarrow$ $u_{n+1} - u_n \geq 0 \quad \forall\, n \in N.$ |
| $u$ ***décroissante*** $\Leftrightarrow$ $u_{n+1} \leq u_n$ pour tout $n$ $\Leftrightarrow$ $u_{n+1} - u_n \leq 0 \quad \forall\, n \in N.$ |

Soit $u_n = \dfrac{2n-3}{n+1}$, vérifions que $u$ est croissante :

$$u_{n+1} - u_n = \frac{2(n+1)-3}{(n+1)+1} - \frac{2n-3}{n+1} = \frac{2n-1}{n+2} - \frac{2n-3}{n+1} = \frac{(2n-1)(n+1)-(2n-3)(n+2)}{(n+2)(n+1)},$$

$$u_{n+1} - u_n = \frac{5}{(n+1)(n+2)}.$$

Le résultat est positif pour tout entier positif $n$ .

D'où : $u_{n+1} - u_n \geq 0 \ \forall n \in \mathbb{N} \Leftrightarrow u$ *croissante.*

Le graphe ci-dessus de la suite vérifie ce résultat, on constate bien que les valeurs $u_n$ croissent avec $n$ , et on les voit se bloquer sur la hauteur $y = 2$ de l'asymptote horizontale, ce dont on parlera plus bas.

## Suite majorée , minorée , bornée :

Une suite est dite ***majorée*** (ou ***minorée***) si et seulement si tous ses termes $u_n$ restent ***inférieurs*** (ou ***supérieurs***) à une quantité $A$ appelée ***Majorant*** (ou ***minorant***) de la suite.

$$u \text{ majorée par } A \Leftrightarrow u_n \leq A \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

$$u \text{ minorée par } B \Leftrightarrow u_n \geq B \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

$$u \text{ bornée par } A \text{ et } B \Leftrightarrow A \leq u_n \leq B \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Vérifions, pour la suite précédente, qu'elle est majorée par $2$ , comme l'exprime son graphe. Pour des commodités de calcul, plutôt que de montrer $u_n \leq 2$ , on compare à $0$ , soit $u_n - 2 \leq 0 \ \forall n \in \mathbb{N}$ .

$u_n - 2 = \dfrac{2n-3}{n+1} - 2 = \dfrac{(2n-3)-2(n+1)}{n+1} = -\dfrac{5}{n+1} \leq 0$ pour tout entier naturel $n$ .

**La suite est majorée par 2 .** *Toute valeur supérieure à 2 est également majorant de la suite, mais son graphe semble indiquer que 2 est le plus petit de ces majorants.*

## Convergence - Divergence d'une suite numérique :

Si, lorsque l'ordre $n$ s'accroît jusqu'à devenir infini, les termes $u_n$ de la suite se concentrent sur une valeur $L$ jusqu'à se confondre avec elle, la suite est dite ***convergente vers*** $L$ , ce que l'on note $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = L$ .

(qui est lu : « limite de $u_n$ égal $L$ » ).

Pour $u_n = \dfrac{2n-3}{n+1}$ , selon le rapport des plus hauts degrés, on vérifie $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 2$ .

Si, au contraire, les termes $u_n$ tendent vers l'infini lorsque $n \to +\infty$ , la suite est dite ***divergente***.