A/ Les suites arithmétiques

Une suite numérique u est dite ***arithmétique*** si et seulement si chacun de ses termes est égal au précédent ***augmenté*** d'une valeur constante r appelée ***raison*** de la suite.

$$u \text{ arithmétique} \Leftrightarrow u_{n+1} = u_n + r \Leftrightarrow u_{n+1} - u_n = r = C^{te}, \forall n \in \mathbb{N}.$$

Ainsi **(-7,-3,+1,+5,+9,+13 .....)** forment une suite arithmétique de raison $r = +4$.

Exemple : Soit u telle que $u_n = 1 + 2n$ (forme *fonctionnelle*) . Montrons que u est arithmétique.

$u_{n+1} - u_n = [1 + 2(n+1)] - (1 + 2n) = +2$. La suite u est arithmétique, de raison $r = +2$.

Relation entre deux termes d'une suite arithmétique : $u_n = u_p + (n-p).r$

Ainsi $u_7 = u_6 + r$, $u_{12} = u_5 + 7r$, $u_8 = u_{21} - 13r$. (Il suffit d'ajuster le nombre de raisons entre n et p).

Présentation récurrente *d'une suite arithmétique*

Il faut connaître ***un terme*** , pour amorcer la récurrence, et sa ***raison*** , pour passer d'un terme au suivant :

Exemple : $\begin{cases} u_1 = -4 \\ u_{n+1} = u_n + 5 \end{cases}$, suite arithmétique de raison $r = +5$.

Présentation fonctionnelle *d'une suite arithmétique*

Par la relation exprimant un terme u_n en fonction d'un autre u_p , on calcule en général le terme *général* u_n de la suite, en fonction du premier terme u_1 ou u_0 de cette suite :

$$u_n = u_0 + n.r \quad \text{ou} \quad u_n = u_1 + (n-1).r$$

Exemple précédent : $u_n = u_1 + (n-1).r = -4 + 5(n-1)$, soit : $u_n = 5n - 9 \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

On remarquera que la présentation *fonctionnelle* d'une suite arithmétique est une fonction *affine* , et son graphe une *droite* de coefficient directeur $a = r$ (raison de la suite) : $u_n = a.n + b \Leftrightarrow y = a x + b$.

Le graphe d'une suite ***arithmétique*** est une <u>droite</u>, <u>*décroissante*</u> si $r < 0$,
<u>*croissante*</u> si $r > 0$, <u>*horizontale*</u> , donc *constante* , si $r = 0$.

Une suite arithmétique non constante ($r \neq 0$) est *toujours divergente.*

$$\begin{cases} \lim\limits_{n \to +\infty} u_n = -\infty \text{ si } r < 0 \text{ (droite décroissante)} \\ \lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty \text{ si } r > 0 \text{ (droite croissante)} \end{cases}$$

Suite arithmétique de 3 termes : (a, b, c) ***suite arithmétique*** $\Leftrightarrow 2b = a + c$

$b = a + r$ et $b = c - r$ entraînent $2b = a + c$. La valeur b est le milieu de $[a, c]$.

Somme des termes d'une suite arithmétique finie :

On démontre par récurrence :

u **suite *arithmétique*** $\Rightarrow S_n = u_1 + u_2 + u_3 + \ldots\ldots + u_n = \frac{n}{2}(u_1 + u_n)$.

La formule est *dangereuse* :

Se souvenir que n est le ***nombre de termes***, $(u_1 + u_n)$ la ***somme des 2 termes extrêmes***.

Ainsi : $S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \ldots\ldots + u_n = \frac{n+1}{2}(u_0 + u_n)$, car il y a $(n + 1)$ termes.

Ecrire « S_n » peut signifier tout autant « n est le nombre de termes » que « le dernier terme est u_n ».

Exemple : Nous savons que $S_n = 1 + 2 + 3 + \ldots.. + n = \frac{n(n+1)}{2}$, ce que confirme la formule précédente, puisqu'on a affaire à une suite arithmétique de n termes, de 1er terme $u_1 = 1$ et dernier terme $u_n = n$. La raison est $r = +1$.

B/ Les suites géométriques

Une suite numérique u est dite ***géométrique*** si et seulement si chacun de ses termes est égal au précédent ***multiplié*** par une valeur constante $q \neq 0$, appelée ***raison*** de la suite.

$$u \text{ géométrique} \Leftrightarrow u_{n+1} = u_n \cdot q \Leftrightarrow \frac{u_{n+1}}{u_n} = q = \mathrm{C^{te}} \ , \ \forall n \in \mathbb{N} .$$

Ainsi $(-16 , +4 , -1 , +\frac{1}{4} , -\frac{1}{16} , +\frac{1}{64} .....)$ forment une suite géométrique de raison $q = -\frac{1}{4}$.

<u>*Exemple*</u> : Soit u telle que $u_n = 3.(2^n)$ (forme *fonctionnelle*). Montrons que u est géométrique.

$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{3.(2^{n+1})}{3.(2^n)} = +2$. La suite u est géométrique, de raison $q = +2$.

Relation entre deux termes d'une suite géométrique : $u_n = u_p \cdot q^{(n-p)}$

Ainsi $u_4 = u_3 \cdot q$, $u_9 = u_5 \cdot q^4$, $u_6 = u_8 . q^{-2} = \frac{u_8}{q^2}$. (Il suffit d'ajuster, dans la puissance, le nombre de raisons entre n et p).

<u>*Présentation* récurrente *d'une suite géométrique*</u>

Il faut connaître ***un terme*** , pour amorcer la récurrence, et la ***raison*** , pour passer d'un terme au suivant :

Exemple : $\begin{cases} u_0 = +3 \\ u_{n+1} = -\frac{1}{2} u_n \end{cases}$, suite géométrique de raison $q = -\frac{1}{2}$.

<u>*Présentation* fonctionnelle *d'une suite géométrique*</u>

Par la relation exprimant un terme u_n en fonction d'un autre u_p , on calcule en général le terme *général* u_n de la suite, en fonction du premier terme u_1 ou u_0 de cette suite.

$$u_n = u_0 . q^n \quad \text{ou} \quad u_n = u_1 . q^{n-1} .$$

Exemple précédent : $u_n = 3.(-\frac{1}{2})^n \quad \forall n \in \mathbb{N}$. *Attention* : « **-1** » doit rester dans la puissance.

Convergence ou Divergence d'une suite géométrique :

Si $|q| < 1$, la suite ***géométrique*** est ***convergente* vers 0** : $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$

Si $|q| > 1$, la suite ***géométrique*** est ***divergente*** : $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \pm\infty$

Multiplier par **-0,5** revient à diviser par **-2**, et multiplier par **+0,33** à diviser par +3 .

Multiplier par q tel que $|q| < 1$ équivaut à ***diviser*** , ce qui justifie qu'en définitive $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$.

Exemple : $(-16 , +4 , -1 , +\frac{1}{4} , -\frac{1}{16} , +\frac{1}{64} .....) \to 0$, avec $q = -\frac{1}{4} = -0{,}25$.

<u>*A l'inverse*</u> : Multiplier par **-3** ou par **+2**, soit par q tel que $|q| > 1$, rend les termes de la suite de plus en plus grands en valeur absolue, soit $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \pm\infty$. *Exemple* : $(-\frac{1}{4} , -\frac{1}{2} , -1 , -2 , -4 , -8 .....) \to -\infty$, avec $q = +2$.

Suite géométrique de 3 termes : (a, b, c) sont en suite *géométrique* $\Leftrightarrow b^2 = a \cdot c$

$b = a \cdot q$ et $b = \frac{c}{q}$ entraînent bien $b.b = (a \cdot q)(\frac{c}{q})$, soit $b^2 = a.c$.

Somme des termes d'une suite géométrique finie :

On démontre par récurrence :

u **suite *géométrique*** $\Rightarrow S_n = u_1 + u_2 + u_3 + ... + u_n = u_1 . \frac{1 - q^n}{1 - q}$, si $q \neq 1$.

La formule est *dangereuse* :

Se souvenir que n est le <u>***nombre de termes***</u> , et u_1 le <u>***premier terme***</u>.

Somme infinie des termes d'une suite géométrique convergente :

Une suite géométrique est convergente ***si et seulement si* (*ssi*)** $|q| < 1$.

Dans ce cas, q^n devient de plus en plus petit lorsque n augmente : $\lim\limits_{n \to +\infty} q^n = 0$.

On déduit, en poussant la formule à sa limite $S_n = u_1 + u_2 + u_3 + \dots\dots + u_n = u_1.\dfrac{1-q^n}{1-q}$, que la **somme infinie des termes est** $\boldsymbol{S = \dfrac{u_1}{1-q}}$ **.**

Ainsi : $\mathbf{1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{8} + \dfrac{1}{16} + \dfrac{1}{32} + \dots}$ infiniment … $\mathbf{= \dfrac{u_1}{1-q} = \dfrac{1}{1-\dfrac{1}{2}} = +2}$.

Le résultat est *fini* malgré une somme infinie.