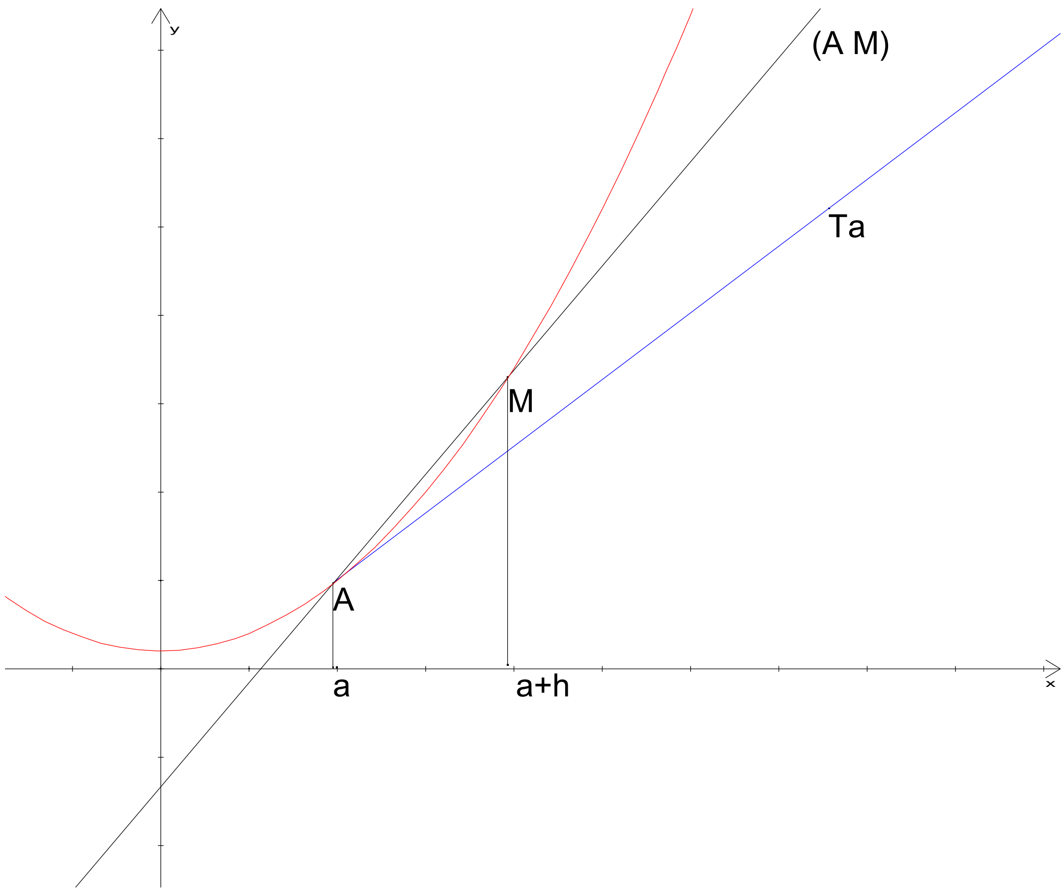
TAUX DE VARIATION – NOMBRE DÉRIVÉ $T_x = f'(x)$:

1[ère] présentation :

La tangente T_a au point A de C_f d'abscisse a est la *position limite* des sécantes S_{AM} , lorsque l'abscisse $x = a + h$ du second point d'intersection M , revient vers a jusqu'à se confondre avec lui (h tend vers 0).

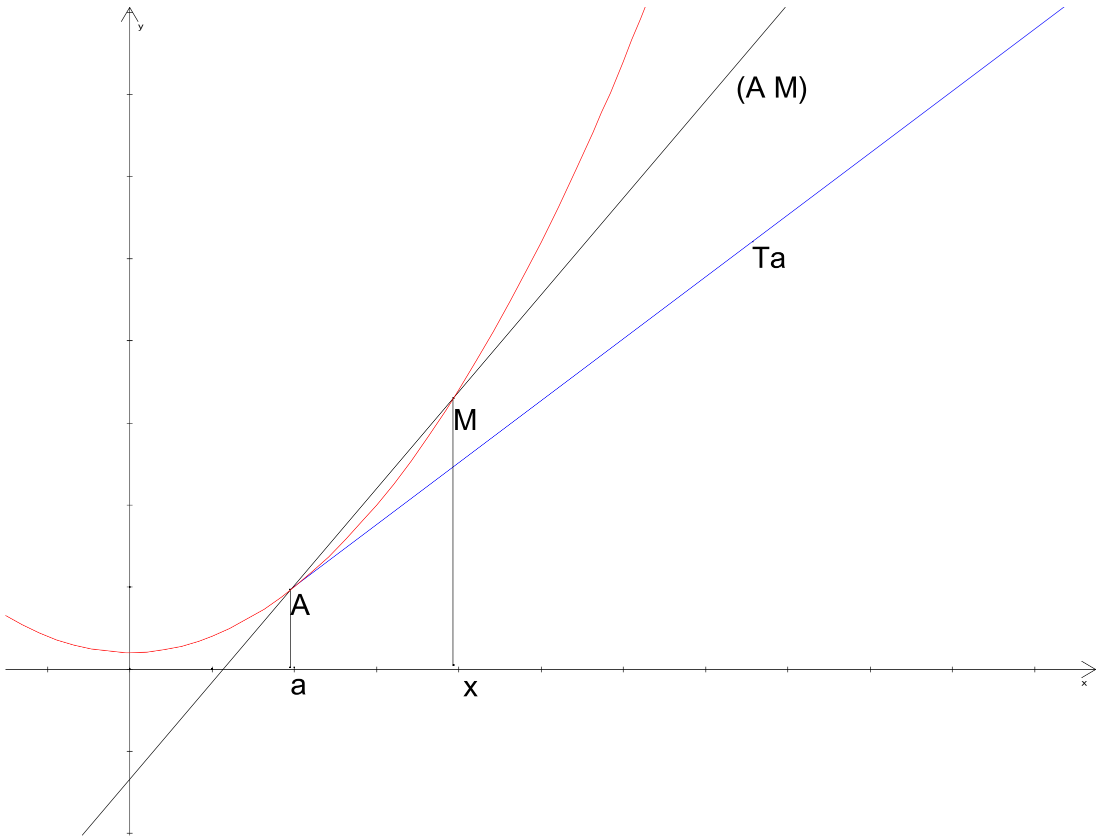


Son coefficient directeur est donné par le *nombre dérivé* de f en a :

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} .$$

2ème présentation :

La tangente T_a au point A de C_f d'abscisse a est la *position limite* des sécantes S_{AM}, lorsque l'abscisse x du second point d'intersection M, revient vers a jusqu'à se confondre avec lui (x tend vers a).



Son coefficient directeur est donné par le *nombre dérivé* de f en a :

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \quad .$$

***Exemple* 1 :** Soit $f(x) = -x^2 + x + 2$.

Calculer $f'(3)$, nombre dérivé de f en $x = +3$, par les deux formules précédentes.

a) $f'(a) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(a+h) - f(a)}{h}$ **:**

$f(3) = -(3^2) + 3 + 2 = -4$ et $f(3+h) = -(3+h)^2 + (3+h) + 2$.

$$f'(3) = \lim_{h \to 0} \frac{f(3+h) - f(3)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{[-(3+h)^2 + (3+h) + 2] - (-4)}{h} = \frac{-9 - 6h + h^2 + 3 + h + 2 + 4}{h},$$

$f'(3) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{-5h + h^2}{h} = \lim\limits_{h \to 0} (-5 + h) = -5$ (Si f est dérivable en 3 , il faut parvenir à simplifier par h) .

Remarque : Lorsqu'on travaille avec h , qui devient de plus en plus petit, l'usage est de classer des nombres de plus grand

au plus petit ordre de grandeur, or h petit implique h^2 encore plus petit.

On écrira : $4 - 3h + 2h^2$ (le plus haut degré de h en dernier).

b) $f'(a) = \lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$ **:**

$$f'(3) = \lim_{x \to 3} \frac{f(x) - f(3)}{x - 3} = \lim_{x \to 3} \frac{(-x^2 + x + 2) - (-4)}{x - 3} = \lim_{x \to 3} \frac{-x^2 + x + 6}{x - 3}.$$

Remarque : Si f est dérivable en $x = 3$, il faut diviser le numérateur par le dénominateur, ce qui signifie que le numérateur est multiple de $x - 3$.

On constate aisément que $-x^2 + x + 6$ admet $x_1 = 3$ et $x_2 = -2$ pour racines,

soit : $-x^2 + x + 6 = -(x-3)(x+2)$.

$$f'(3) = \lim_{x \to 3} \frac{-x^2 + x + 6}{x - 3} = \lim_{x \to 3} \frac{-(x-3)(x+2)}{x - 3} = \lim_{x \to 3} (-x - 2) = -5 .$$

La 1ère méthode semble plus aisée.

Exemple 2 **:** Soit $f(x) = \dfrac{x+2}{1-x}$.

Calculer $f'(x)$, nombre dérivé de f en x, par les deux formules précédentes.

a) $\boldsymbol{f'(a) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(a+h) - f(a)}{h}}$ **:**

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\dfrac{(x+h)+2}{1-(x+h)} - \dfrac{x+2}{1-x}}{h} = \lim_{h \to 0} \left(\frac{1}{h} \times \left[\frac{(x+h)+2}{1-(x+h)} - \frac{x+2}{1-x}\right]\right),$$

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \left(\frac{1}{h} \times \frac{[(x+h)+2](1-x) - (x+2)[1-(x+h)]}{[1-(x+h)](1-x)}\right),$$

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \left[\frac{1}{h} \times \frac{x - x^2 + h - xh + 2 - 2x - x + x^2 + xh - 2 + 2x + 2h}{(1-x-h)(1-x)}\right] = \lim_{h \to 0} \left[\frac{1}{h} \times \frac{3h}{(1-x-h)(1-x)}\right],$$

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{3}{(1-x-h)(1-x)} = \frac{3}{(1-x)^2}.$$

On peut remarquer que $f'(x) = \dfrac{3}{(1-x)^2} > 0$. *La fonction* f *est partout croissante.*

b) $\boldsymbol{f'(a) = \lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x) - f(a)}{x-a}}$ **:**

Par cette méthode, il faut toujours calculer en a *et non directement en* x, *sinon on aurait une expression* $f'(x) = \lim\limits_{x \to x} \dfrac{f(x) - f(x)}{x - x}$ *, qui ne veut rien dire.*

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x-a} = \lim_{x \to a} \frac{\dfrac{x+2}{1-x} - \dfrac{a+2}{1-a}}{x-a} = \lim_{x \to a} \frac{\dfrac{(x+2)(1-a) - (a+2)(1-x)}{(1-x)(1-a)}}{x-a},$$

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{\dfrac{x - ax + 2 - 2a - a + ax - 2 + 2x}{(1-x)(1-a)}}{x-a} = \lim_{x \to a} \frac{\dfrac{3x - 3a}{(1-x)(1-a)}}{x-a} = \lim_{x \to a} \frac{3(x-a)}{(1-x)(1-a)(x-a)},$$

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{3}{(1-x)(1-a)} = \frac{3}{(1-a)^2}.$$

On retrouve : $f'(x) = \dfrac{3}{(1-x)^2}$.