

TAUX DE VARIATION – NOMBRE DÉRIVÉ $T_x = f'(x)$:

Le taux de variation T_x indique l'inclinaison (coefficient directeur ou pente) de la tangente à la courbe représentative C_f , en toute abscisse x .

La connaissance de T_x informe sur la croissance ou la décroissance de la fonction f lorsque x avance.

Le calcul de T_x se fait en deux temps :

I) Taux de variation $T_{x,x'}$ de la sécante au graphe entre ses points d'abscisse x et x' :

Le taux de variation $T_{x,x'}$ est le coefficient directeur (pente) de la sécante $S_{MM'}$ au graphe de f , qui passe par les points M et M' de ce graphe, d'abscisses respectives x et x' .

Soient $M(x; y)$ et $M'(x'; y')$ deux points de C_f :

Etant sur ce graphe, leurs ordonnées vérifient $y = f(x)$ et $y' = f(x')$.

Le coefficient directeur (pente ou taux de variation) de la sécante $S_{MM'}$ est

$$T_{x,x'} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y' - y}{x' - x} = \frac{f(x') - f(x)}{x' - x}.$$

Sauf cas particulier, il est *toujours possible* et même *indispensable*, de simplifier $x' - x$ entre le numérateur et le dénominateur du taux de variation de $S_{MM'}$.

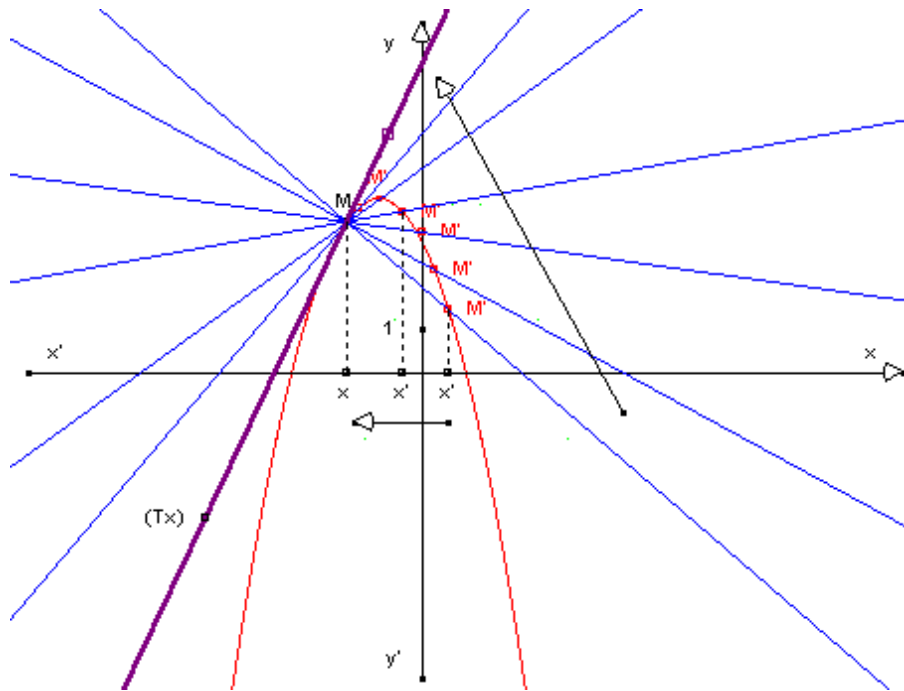
Après avoir simplifié, on fait évoluer la sécante $S_{MM'}$ vers la tangente T_M en rapprochant le point M du point M' , jusqu'à se confondre avec ce dernier.

Pour ce faire, on rapproche x' de x , puis on les confond.

L'expression obtenue, qui ne contient plus que des termes x est appelée *Taux de Variation de f en x* . Elle exprime le coefficient directeur T_x de la tangente en x à C_f .

T_x est noté $f'(x)$, nombre dérivé de f en x .

$$T_a = f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a + h) - f(a)}{h}.$$



Lorsque x' se rapproche de x on voit les sécantes $S_{MM'}$ remonter vers la tangente T_M .
(qui est notée T_x).

Exemple : Calcul du *Taux de Variation* de $f(x) = -x^2 + 3x + 4$.

1/ Taux de variation de la sécante $S_{MM'}$:

$$T_{x,x'} = \frac{f(x') - f(x)}{x' - x} = \frac{(-x'^2 + 3x' + 4) - (-x^2 + 3x + 4)}{x' - x} = \frac{-(x'^2 - x^2) + 3(x' - x)}{x' - x}$$

On simplifie par $x' - x$: $T_{x,x'} = -(x' + x) + 3$, **pente de la sécante $S_{MM'}$ (coefficient directeur).**

On remarquera qu'en donnant des valeurs quelconques à x et à x' , on obtient les *pentés* de toutes les sécantes possibles au graphe.

Ainsi la sécante passant par les points du graphe d'abscisses $x = -2$ et $x' = +3$ a pour coefficient directeur : $T_{-2,+3} = -(3 - 2) + 3 = +2$.

2/ Taux de variation T_x (nombre dérivé $f'(x)$) de la tangente au graphe en son point d'abscisse x .

La tangente au graphe, en son point d'abscisse x , est la *position limite* des sécantes $S_{MM'}$, lorsque le deuxième point d'intersection M' revient sur M , jusqu'à se confondre avec lui.

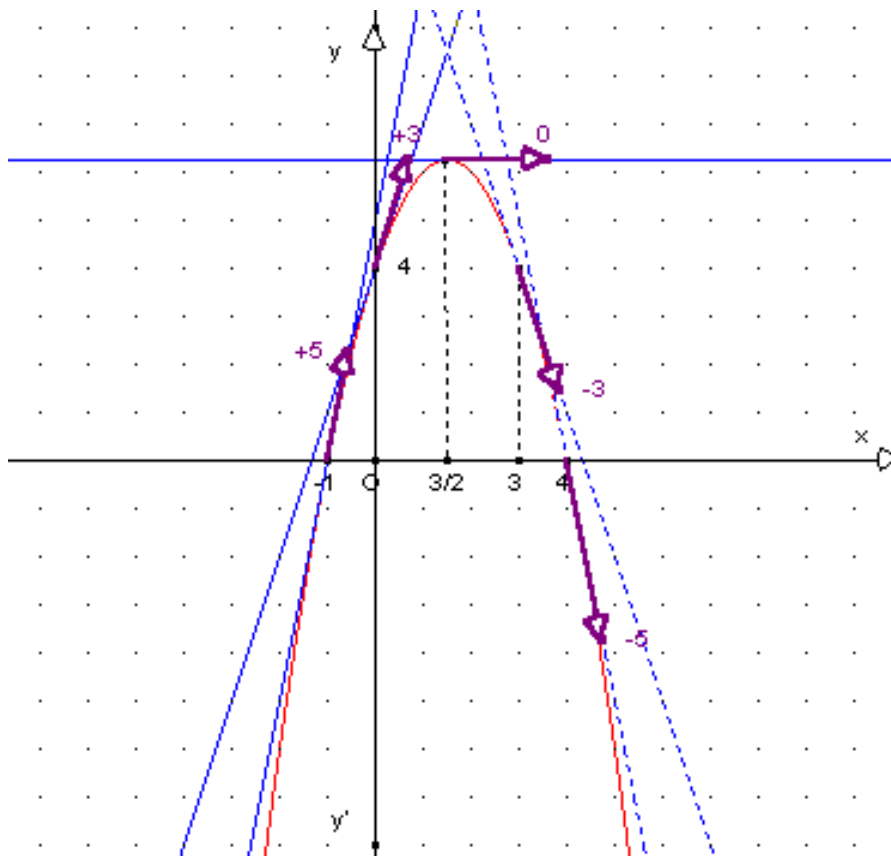
On passe du coefficient directeur de la sécante $S_{MM'}$ à celui de la tangente T_M , en confondant x' avec x .

$T_x = -2x + 3$, pente de la tangente T_M au point de C_f d'abscisse x .

(*Taux de variation* de f en x)

Notation en dérivée :

$f'(x) = -2x + 3$, qui indique le coefficient directeur de la tangente T_M en M , d'abscisse x à la courbe représentative C_f .



Exemples : $f'(x) = -2x + 3$ pente de la tangente T_x

Pour $x = -1$, on obtient $f'(-1) = +5$, la tangente en $x = -1$ **monte** de 5 en avançant de 1.

Pour $x = 0$, on obtient $f'(0) = +3$, la tangente en $x = 0$ **monte** de 3 en avançant de 1.

Pour $x = 3/2$, on obtient $f'(3/2) = 0$, la tangente en $x = 3/2$ est **horizontale**.

Pour $x = 3$, on obtient $f'(3) = -3$, la tangente en $x = 3$ **descend** de 3 en avançant de 1.

Pour $x = 4$, on obtient $f'(4) = -5$, la tangente en $x = 4$ **descend** de 5 en avançant de 1.

II) SENS DE VARIATION de f :

$f'(x) > 0 \Leftrightarrow f$ est localement **croissante** autour de x

$f'(x) < 0 \Leftrightarrow f$ est localement **décroissante** autour de x

$T_x = f'(x) = 0 \Leftrightarrow f$ présente un **Extremum (Maximum ou minimum)** en x
ou un **point d'inflexion** (la tangente est alors horizontale)

Il faut chercher les éventuels *extrema* (sommets) et donner le signe du *taux de variation* suivant x , afin de dresser le tableau de variations.

a/ Recherche de l'extremum de C_f . C'est le point du graphe où la *tangente est de pente nulle*.

$$T_x = f'(x) = 0 \Leftrightarrow -2x + 3 = 0 \Leftrightarrow x = +\frac{3}{2}.$$

L'extremum est situé sur C_f , donc son ordonnée vérifie $y = f(x) = f\left(\frac{3}{2}\right) = +\frac{25}{4}$.

L'extremum est $E\left(\frac{3}{2}; \frac{25}{4}\right)$.

b/ Signe du Taux de Variation (Dérivée) :

S'il est positif, $f(x)$ croît avec x , sinon $f(x)$ décroît lorsque x croît.

$f'(x) > 0 \Leftrightarrow -2x + 3 > 0 \Leftrightarrow x < \frac{3}{2}$. La fonction est croissante pour $x < \frac{3}{2}$, décroissante au delà.

III/ TABLEAU DE VARIATION

C'est le résumé des résultats précédents. Il exprime l'évolution des *ordonnées* (hauteurs) $y = f(x)$ lorsque l'abscisse x avance de $-\infty$ vers $+\infty$.

X	$-\infty$	$\frac{3}{2}$	$+\infty$
$f'(x) = T_x$	+	0	-
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow \frac{25}{4}$	$\searrow -\infty$

IV/ TRACE DE LA COURBE REPRESENTATIVE (Graphe) :

Le tableau de variations inspire le graphe précédemment tracé, dont on peut calculer quelques points, qui vérifient $y = f(x)$.

On peut savoir :

$$f(x) = ax^2 + bx + c \Rightarrow f'(x) = 2ax + b$$

$$f(x) = \frac{ax + b}{cx + d} \Rightarrow f'(x) = \frac{ad - bc}{(cx + d)^2}.$$