Plan d'Etude d'une Fonction Numérique :

Organisation à respecter globalement lors d'une étude de fonction

1) Domaine de définition

Continuité - Dérivabilité - Parité

2) Limites aux bornes du domaine *(hors programme 1ère)*

Asymptotes éventuelles

3) Intersections avec les axes de coordonnées *(facultatif)*

4) Dérivée

Recherche des extrema

Signe de la dérivée - Sens de variation

5) Tableau de variation (tableau résumé des travaux précédents)

6) Tracé du Graphe (Courbe Représentative)

Exemple **1 : Etude et Courbe Représentative (*C*) de** $f : x \to f(x) = \dfrac{1+x}{x-2}$.

- ***Domaine de définition :*** $f(x)$ définie si $x \neq +2$. $D_f = \mathbb{R} - \{+2\}$.

Comme tout rapport de polynômes, f est continue et dérivable sur son domaine D_f .

- ***Limites aux bornes du domaine :*** *(hors programme 1ère)*

1) Aux infinis :

Un rapport de polynômes se comporte aux infinis comme le rapport de ses plus hauts degrés.

$\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{1+x}{x-2} = \lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{x}{x} = +1$: *Asymptote horizontale d'équation* $y = +1$.

2) A l'abscisse de non définition : $x = 2$

Si $x \to 2^-$ $\begin{cases} 1+x \to 3 \\ x-2 \to 0^- \end{cases}$, d'où : $\lim\limits_{x \to 2^-} \dfrac{1+x}{x-2} = -\infty$ et si $x \to 2^+$ $\begin{cases} 1+x \to 3 \\ x-2 \to 0^+ \end{cases}$,

d'où : $\lim\limits_{x \to 2^+} \dfrac{1+x}{x-2} = +\infty$: *Asymptote verticale* $x = 2$.

- *<u>Intersections avec les axes de coordonnées</u>* : *(facultatif)*

$$M(x\,;y) \in (C) \cap x'x \Leftrightarrow \begin{cases} y = f(x) \\ y = 0 \end{cases} \text{, d'où : } f(x) = 0 \Leftrightarrow 1 + x = 0 \Leftrightarrow x = -1 \text{ ,}$$

soit $(C) \cap x'x = \{A(-1\,;0)\}$.

$$M(x\,;y) \in (C) \cap y'y \Leftrightarrow \begin{cases} y = f(x) \\ x = 0 \end{cases} \text{, d'où : } y = f(0) = -\frac{1}{2} \text{, soit } (C) \cap y'y = \{B(0\,;-\frac{1}{2})\}$$

- *<u>Dérivée</u>* :

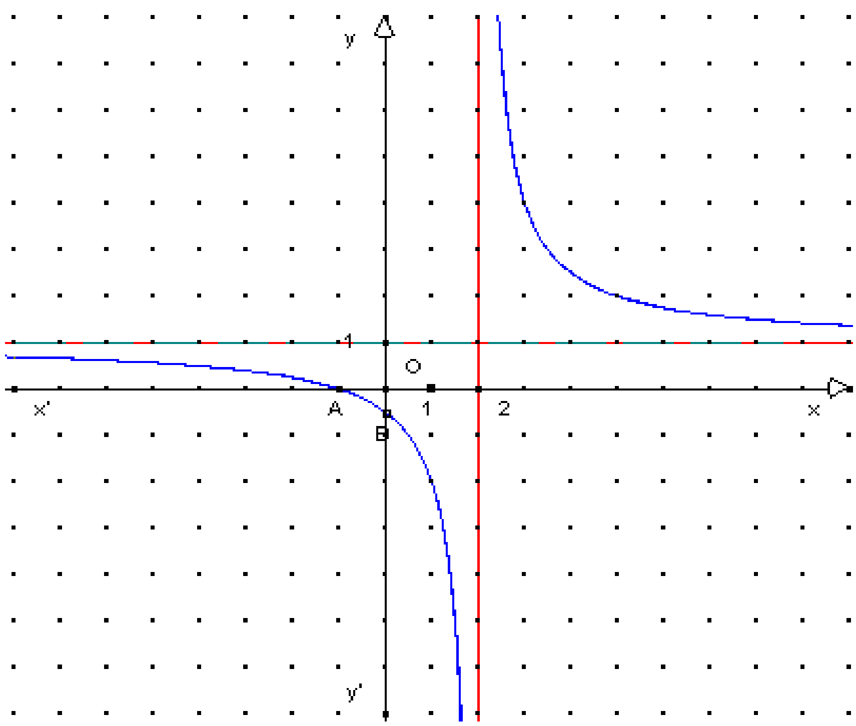
$$Forme\ \frac{u}{v} \text{ , d'où : } \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - v'u}{v^2} \text{ , soit } f'(x) = \frac{1(x-2) - 1(1+x)}{(x-2)^2} = -\frac{3}{(x-2)^2} \text{ .}$$

On déduit que $f'(x) < 0$, $\forall x \in D_f$.

- *<u>Tableau de variation</u>* :

x	$-\infty$		$+2$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	$\|\|$	$-$	
$f(x)$	1^-	$\searrow$	$-\infty \; \|\| \; +\infty$	$\searrow$	1^+

- *<u>Courbe Représentative</u>* :



Exemple **2 :** **Etude et Courbe Représentative (*C*) de $g : x \rightarrow g(x) = x^2 + 3x - 4$.**

- ***Domaine de définition* :**

$g(x)$ est définie, c'est à dire calculable pour tout x réel. $D_g = \mathbb{R} =]-\infty ; +\infty[$.

Comme tout polynôme, g est continue et dérivable sur son domaine D_g .

- ***Limites aux bornes du domaine* :** *(hors programme 1ère)*

Aux infinis : Un polynôme se comporte aux infinis comme son monôme de plus haut degré.

d'où $\lim\limits_{x \to \pm\infty} g(x) = \lim\limits_{x \to \pm\infty} (x^2 + 3x - 4) = \lim\limits_{x \to \pm\infty} x^2 = +\infty$.

Branche parabolique sur l'axe y'y.

- ***Intersections avec les axes de coordonnées* :** *(facultatif)*

$M(x ; y) \in (C) \cap x'x \Leftrightarrow \begin{cases} y = g(x) \\ y = 0 \end{cases}$, d'où : $g(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 + 3x - 4 = 0$.

Racines $x = -4$ et $x = +1 \Rightarrow (C) \cap x'x = \{A(-4 ; 0) ; A'(+1 ; 0)\}$.

$M(x ; y) \in (C) \cap y'y \Leftrightarrow \begin{cases} y = g(x) \\ x = 0 \end{cases}$, d'où : $y = g(0) = -4$,

soit $(C) \cap y'y = \{B(0 ; -4)\}$.

- ***Dérivée* :**

$g(x) = x^2 + 3x - 4 \Leftrightarrow g'(x) = 2x + 3$.

Recherche de l'extremum (pente nulle) : $g'(x) = 0 \Leftrightarrow 2x + 3 = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{3}{2}$.

Ce sommet est point du graphe, donc vérifie : $y = g(-\frac{3}{2}) = -\frac{25}{4}$.

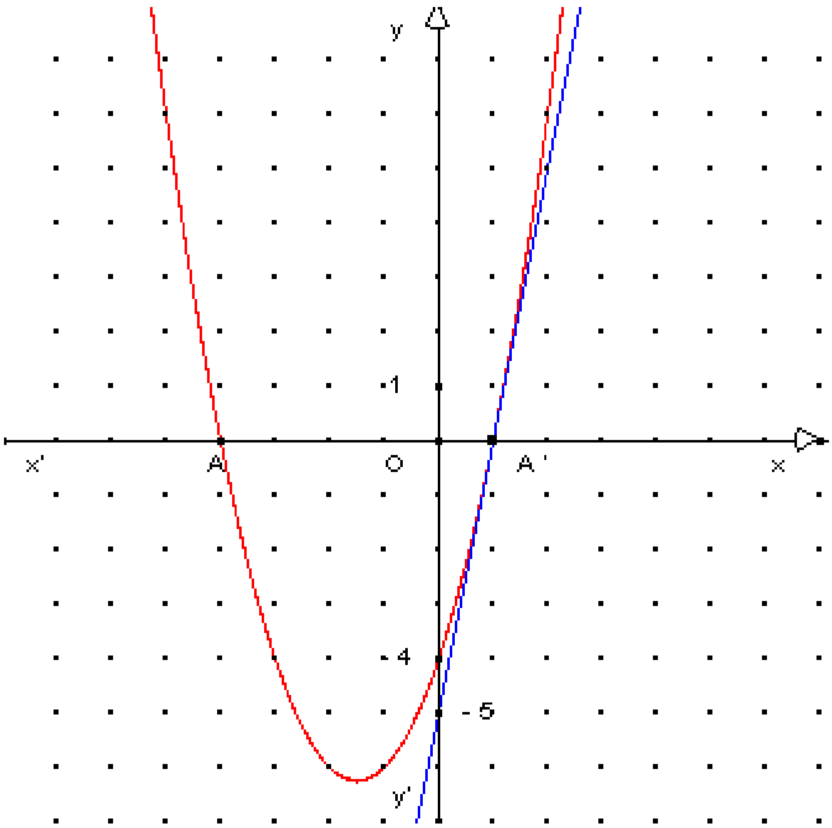
L'extremum est $E(-\frac{3}{2} ; -\frac{25}{4})$.

Signe de la dérivée : celui du binôme $2x + 3$.

- ***Tableau de variation*** :

x	$-\infty$		$-3/2$		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$	$+\infty$	↘	$-25/4$	↗	$+\infty$

- ***Courbe Représentative*** :



Equation de la tangente à un graphe :

Soit $A(x_A\,;y_A)$ un point de la courbe représentative (C) de la fonction f, ce qui impose $y_A = f(x_A)$.

Soit $T_A : y = a\,x + b$ l'équation de la tangente en A à ce graphe.

La pente (coefficient directeur) d'une tangente à un graphe en l'un de ses points est donnée par la valeur du nombre dérivé en ce point.

$a = f'(x_A)$: L'équation devient : $T_A : y = f'(x_A).x + b$.

Imposons de plus à cette tangente de passer par le point $A(x_A\,;f(x_A))$, donc ses coordonnées doivent vérifier l'équation de $T_A : y = f'(x_A).x + b$.

$A(x_A\,;f(x_A)) \in T_A \Leftrightarrow f(x_A) = f'(x_A).x_A + b \Leftrightarrow b = f(x_A) - f'(x_A).x_A$.

d'où : $T_A : y = f'(x_A).x + f(x_A) - f'(x_A).x_A$, soit $T_A : y = f'(x_A).x + [f(x_A) - f'(x_A).x_A]$,

qui est bien de la forme $y = A\,x + B$, équation d'une droite : $\begin{cases} A = f'(x_A) \\ B = f(x_A) - f'(x_A).x_A \end{cases}$.

Le résultat est généralement présenté sous la forme : $T_A : y = f'(x_A).(x - x_A) + f(x_A)$, ou encore, en appelant a l'abscisse du point A.

Equation de la tangente à C_f en a : $\boldsymbol{T_a : y = f'(a)(x - a) + f(a)}$

Exemple : **Equation de la tangente au graphe de la fonction précédente en $x = +1$.**

$g(x) = x^2 + 3x - 4 \Rightarrow g'(x) = 2x + 3$.

L'équation de la tangente à C_g en $x = a$ est $T_a : y = g'(a)(x - a) + g(a)$.

d'où $T_1 : y = g'(1)(x - 1) + g(1) \Leftrightarrow T_1 : y = 5(x - 1) + 0 \Leftrightarrow \boldsymbol{T_1 : y = 5x - 5}$.

(Voir courbe représentative précédente)