Equations du 2nd Degré – Somme et Produit des Racines

Somme et Produit des Racines :

Soit $ax^2 + bx + c = 0$ une équation du second degré ($a \neq 0$).

On supposera que l'équation admet des racines $\Leftrightarrow$ $\Delta = b^2 - 4ac \geq 0$ $\Leftrightarrow$ $\begin{cases} x_1 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} \\ x_2 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} \end{cases}$.

***Somme des Racines* :**

$$S = x_1 + x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} + \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-2b}{2a} = -\frac{b}{a}.$$

***Produit des Racines* :**

$$P = x_1x_2 = \left(\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}\right)\left(\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}\right) = \frac{(b-\sqrt{\Delta})(b+\sqrt{\Delta})}{4a^2} = \frac{b^2-\Delta}{4a^2} = \frac{b^2-(b^2-4ac)}{4a^2} = \frac{4ac}{4a^2} = \frac{c}{a}.$$

Les racines d'une équation du second degré, lorsqu'elles existent,

ont pour *Somme* $S = -\frac{b}{a}$ et pour *Produit* $P = \frac{c}{a}$

Ainsi : $2x^2 - 9x + 10 = 0$.

$\Delta = b^2 - 4ac = 81 - 80 = 1 \Rightarrow$ Deux racines distinctes $\begin{cases} \alpha = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{9+1}{4} = \dfrac{5}{2} \\ \beta = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{9-1}{4} = 2 \end{cases}$.

La somme des racines est $\alpha + \beta = \frac{5}{2} + 2 = \frac{9}{2} = -\frac{b}{a}$, et leur produit $\alpha\beta = \frac{5}{2} \times 2 = 5 = \frac{c}{a}$.

Inversement : **Résolution rapide d'une équation du second degré .**

Disposant de l'équation $ax^2 + bx + c = 0$, et en utilisant les valeurs de a , b , c :

Si on trouve deux nombres α et β de somme $-\frac{b}{a}$ et de produit $\frac{c}{a}$,

il s'agit des deux racines de l'équation.

Exemple : **Résoudre dans $\mathbb{R}$: $x^2 + 5x - 14 = 0$.**

$S = \alpha + \beta = -\dfrac{b}{a} = -5$ et $P = \dfrac{c}{a} = -14 \Rightarrow \alpha = -7$ et $\beta = +2$ (ou inversement).

Lorsqu'on trouve les racines par cette méthode, ce sont les seules racines possibles, on peut être sûr du résultat.

Réciproquement :

Deux nombres de somme S et de produit P sont les racines de l'équation : $X^2 - SX + P = 0$.

$$\left\{\begin{array}{l} S = x' + x'' \\ P = x'x'' \end{array}\right\} \Rightarrow x' \text{ et } x'' \text{ racines de } X^2 - SX + P = 0$$

Preuve : Soit $\alpha + \beta = S$ et $\alpha\beta = P$, S et P connus.

$\beta = S - \alpha \Rightarrow \alpha\beta = \alpha(S - \alpha)$, soit $\alpha^2 - S\alpha + P = 0$.

Les rôles de α et β étant symétriques, on aurait également obtenu $\beta^2 - S\beta + P = 0$.

Les nombres α et β sont les racines de l'équation $X^2 - SX + P = 0$.

Exemple : **Déterminer a et b réels, sachant $\left\{\begin{array}{l} a + b = 3 \\ ab = -10 \end{array}\right.$** .

$\left\{\begin{array}{l} S = a + b = 3 \\ P = ab = -10 \end{array}\right\} \Rightarrow a , b$ racines de $X^2 - SX + P = 0 \Leftrightarrow X^2 - 3X - 10 = 0$.

$$\Delta = 49 \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} X_1 = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{3 + 7}{2} = +5 \\ X_2 = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{3 - 7}{2} = -2 \end{array}\right. .$$

a , b ayant des rôles symétriques, il existe deux couples solutions :

$(a ; b) = (5 ; -2)$ et $(a ; b) = (-2 ; 5)$.

Expression algébrique de deux variables, symétrique par rapport à celles-ci :

Toute expression dans laquelle deux variables a et b sont* permutables (*rôles symétriques*) *peuvent s'écrire exclusivement avec $S = a + b$* et *$P = ab$.

***Exemple* 1** : $E = \dfrac{a+b}{a^2+b^2}$.

L'expression est bien symétrique par rapport à a et b : $\dfrac{a+b}{a^2+b^2} = \dfrac{b+a}{b^2+a^2}$.

$S = a + b \Rightarrow S^2 = (a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$, soit $a^2 + b^2 = (a+b)^2 - 2ab = S^2 - 2P$.

$E = \dfrac{a+b}{a^2+b^2} = \dfrac{S}{S^2 - 2P}$.

***Exemple* 2** : **Soient α et β les racines de l'équation $2x^2 - 5x - 7 = 0$.**

Sans calculer ces racines, trouver la valeur de l'expression $E = \dfrac{\alpha}{\beta} + \dfrac{\beta}{\alpha}$.

On constate que $a = +2$ et $c = -7$ sont de signes contraires, ce qui assure $\Delta \geq 0$, donc l'existence des racines.

$E = \dfrac{\alpha}{\beta} + \dfrac{\beta}{\alpha}$ est symétrique par rapport à α et β , puisque $E = \dfrac{\alpha}{\beta} + \dfrac{\beta}{\alpha} = \dfrac{\beta}{\alpha} + \dfrac{\alpha}{\beta}$.

E peut donc s'écrire avec l'aide exclusive de $S = \alpha + \beta$ et $P = \alpha\beta$.

$E = \dfrac{\alpha}{\beta} + \dfrac{\beta}{\alpha} = \dfrac{\alpha^2 + \beta^2}{\alpha\beta} = \dfrac{(\alpha+\beta)^2 - 2\alpha\beta}{\alpha\beta} = \dfrac{S^2 - 2P}{P}$.

$S = -\dfrac{b}{a} = \dfrac{5}{2}$ et $P = \dfrac{c}{a} = -\dfrac{7}{2} \Rightarrow E = \dfrac{\dfrac{25}{4} + 7}{-\dfrac{7}{2}} = -\dfrac{\dfrac{53}{4}}{\dfrac{7}{2}} = -\dfrac{53}{4} \times \dfrac{2}{7}$, soit $E = -\dfrac{53}{14}$.

<u>Exploitation de Δ, P, S pour déterminer le nombre et le signe des racines d'une équation du 2ème degré</u> :

$\Delta < 0 \Leftrightarrow$ pas de racine .

$\Delta = 0 \Leftrightarrow$ 2 racines confondues (racine double) $\alpha = \beta = -\dfrac{b}{2a}$.

$\Delta > 0 \Leftrightarrow$ 2 racines distinctes $\begin{cases} \alpha = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \\ \beta = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \end{cases}$.

- *Dans ce dernier cas :*
- $P > 0 \Leftrightarrow \alpha$ et β de même signe $\Leftrightarrow \alpha < \beta < 0$ ou $0 < \alpha < \beta$
  - $S > 0 \Leftrightarrow 0 < \alpha < \beta$
  - $S < 0 \Leftrightarrow \alpha < \beta < 0$.
- $P < 0 \Leftrightarrow \alpha$ et β de signes opposés $\Leftrightarrow \alpha < 0 < \beta$
  - $S < 0 \Leftrightarrow |\alpha| > \beta$ (α plus négatif que β n'est positif)
  - $S > 0 \Leftrightarrow |\alpha| < \beta$ (α moins négatif que β n'est positif)