Equations du Second Degré ou s'y rattachant.

A : Trinôme du 2nd degré en x :

C'est une expression se ramenant à la forme $ax^2 + bx + c = 0$, avec a , b , c réels.

Résultat final à mémoriser : $a \neq 0$, pour être du 2nd degré.

$ax^2 + bx + c = 0 \Rightarrow$ Discriminant (delta) $\boldsymbol{\Delta = b^2 - 4\,ac}$.

Si $\Delta < 0$: L'équation n'admet aucune racine x (solution) , $\boldsymbol{S = \varnothing}$.

Si $\Delta > 0$: L'équation admet 2 solutions distinctes $\begin{cases} x_1 = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \\ x_2 = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \end{cases}$.

Si $\Delta > 0$: L'équation admet 2 solutions confondues $x_1 = x_2 = -\dfrac{b}{2a}$.

Ce sont les deux racines précédentes qui se confondent (racine double).

Exemples :

1/ **Résoudre dans $\mathbb{R}$: $2x^2 + 5x - 7 = 0$.**

$a = +2$, $b = +5$, $c = -7 \Rightarrow \Delta = b^2 - 4ac = 81 > 0$. Deux racines $\begin{cases} x_1 = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = +1 \\ x_2 = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = -\dfrac{7}{2} \end{cases}$.

2/ **Résoudre dans $\mathbb{R}$: $3x^2 - 2x + 1 = 0$.**

$a = +3$, $b = -2$, $c = +1 \Rightarrow \Delta = b^2 - 4ac = -8 < 0$. Pas de racine, le trinôme n'est jamais nul.

3/ **Résoudre dans $\mathbb{R}$: $-x^2 + 4x - 4 = 0$.**

$a = -1$, $b = +4$, $c = -4 \Rightarrow \Delta = b^2 - 4ac = 0$. Racine double : $x_1 = x_2 = -\dfrac{b}{2a} = +2$.

Méthode intermédiaire : Forme Canonique

Les formules précédentes sont basées sur l'utilisation de $\boxed{x^2 + ax = \left(x + \frac{a}{2}\right)^2 - \frac{a^2}{4}}$.

$$\left(x + \frac{a}{2}\right)^2 - \frac{a^2}{4} = \left(x^2 + 2\times\frac{a}{2}\times x + \frac{a^2}{4}\right) - \frac{a^2}{4} = x^2 + ax .$$

1/ Application : **Résoudre dans $\mathbb{R}$: $2x^2 + 5x - 7 = 0$.**

$$2x^2 + 5x - 7 = 0 \Leftrightarrow x^2 + \frac{5}{2}x - \frac{7}{2} = 0 \Leftrightarrow \left(x + \frac{5}{4}\right)^2 - \frac{25}{16} - \frac{7}{2} = 0 \Leftrightarrow \left(x + \frac{5}{4}\right)^2 = \frac{\mathbf{81}}{16} = \frac{\Delta}{4a^2} .$$

On sait que $\boxed{X^2 = A^2 \Leftrightarrow \begin{cases} X = A \\ \text{ou} \\ X = -A \end{cases} \quad \leftarrow \textit{Mémoriser}}$

$$\left(x + \frac{5}{4}\right)^2 = \left(\frac{9}{4}\right)^2 \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x + \frac{5}{4} = \frac{9}{4} \Leftrightarrow x = +1 \\ x + \frac{5}{4} = -\frac{9}{4} \Leftrightarrow x = -\frac{7}{2} \end{array} \right\} \text{, soit } S = \{-\frac{7}{2} ; +1\} .$$

2/ **Résoudre dans $\mathbb{R}$: $3x^2 - 2x + 1 = 0$.**

$$3x^2 - 2x + 1 = 0 \Leftrightarrow x^2 - \frac{2}{3}x + \frac{1}{3} = 0 \Leftrightarrow \left(x - \frac{1}{3}\right)^2 - \frac{1}{9} + \frac{1}{3} = 0 \Leftrightarrow \left(x - \frac{1}{3}\right)^2 = -\frac{2}{9} \quad \left(\frac{\mathbf{-8}}{36} = \frac{\Delta}{4a^2}\right) .$$

$\left(x - \frac{1}{3}\right)^2 = -\frac{2}{9} < 0$ est une situation impossible (carré négatif) . $S = \varnothing$.

3/ **Résoudre dans $\mathbb{R}$: $-x^2 + 4x - 4 = 0$.**

$$-x^2 + 4x - 4 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 4 = 0 \Leftrightarrow (x-2)^2 - 4 + 4 = 0 \Leftrightarrow (x-2)^2 = \mathbf{0} = \frac{\Delta}{4a^2} .$$

$(x-2)(x-2) = 0 \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x - 2 = 0 \Leftrightarrow x_1 = +2 \\ x - 2 = 0 \Leftrightarrow x_2 = +2 \end{array} \right\}$. On comprend le sens de « racine double ».

Toute situation de discriminant nul ($\Delta = 0$) correspond à un « carré parfait » $(x - a)^2$.

Démonstration théorique :

Soit $ax^2 + bx + c = 0$, avec $a \neq 0$.

On divise par a : $x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0 \Leftrightarrow \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a} = 0 \Leftrightarrow \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} = 0$.

D'où l'équivalence : $\boldsymbol{ax^2 + bx + c = 0 \Leftrightarrow \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{\Delta}{4a^2}}$ **.**

- Si $\Delta > 0$: $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{\Delta}{4a^2} \Leftrightarrow \begin{cases} x + \frac{b}{2a} = \frac{\sqrt{\Delta}}{2a} \Rightarrow x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \\ x + \frac{b}{2a} = -\frac{\sqrt{\Delta}}{2a} \Rightarrow x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \end{cases}$.

  L'équation admet deux racines distinctes.

- Si $\Delta < 0$: $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{\Delta}{4a^2} < 0$.

  L'équation n'admet pas de racine (solution).

- Si $\Delta = 0$: $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{\Delta}{4a^2} = 0 \Leftrightarrow x + \frac{b}{2a} = 0$, soit $x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a}$.

  L'équation admet une racine double (la même dans deux facteurs).

B : Formes dérivées de Trinômes du 2nd degré en x :

1/ Equations Bicarrées : $ax^4 + bx^2 + c = 0$.

a) On pose $X = x^2$, soit $X^2 = x^4$, puis on résoud en X .

b) On fait valoir $X = x^2$, pour déterminer les solutions x

Résoudre dans $\mathbb{R}$: $x^4 - 2x^2 - 8 = 0$.

Soit $X = x^2$: L'équation devient $X^2 - 2X - 8 = 0$, de racines $X_1 = +4$ et $X_2 = -2$.

a) $X = +4 \Leftrightarrow x^2 = +4$, soit $x = -2$ ou $x = +2$.

b) $X = -2 \Leftrightarrow x^2 = -2$, qui n'admet pas de solution réelle.

Conclusion : $S = \{-2 ; +2\}$.

Une équation bicarrée peut avoir 0 , 2 ou 4 solutions, suivant le signe de X_1 et X_2 .

2/ Factorisation préalable lorsque l'on devine l'une des racines (racine évidente) :

Lorsqu'un polynôme $P(x)$ admet a pour racine, soit $P(a) = 0$, alors ..
on peut factoriser $x - a$ dans ce polynôme.

$P(x) = (x - a).Q(x)$ avec $\deg(Q) = \deg(P) - 1$ $\boxed{\leftarrow \text{ à mémoriser}}$

Exemples :

1/ **Soit $P(x) = 2x^2 + 3x - 5$: *Vérifier que* $P(1) = 0$ *, puis que* $P(x) = (x - 1)(2x + 5)$.**

$P(1) = 2\times1^2 + 3\times1 - 5 = 2 + 3 - 5 = 0$.

$(x - 1)(2x + 5) = 2x^2 + 5x - 2x - 5 = 2x^2 + 3x - 5 = P(x)$.

2/ **Soit $P(x) = -3x^2 + 5x + 2$: *Vérifier que* $P(2) = 0$ *, puis déterminer la factorisation de* $P(x)$ *en deux binômes du 1er degré* :**

$P(2) = -3\times2^2 + 5\times2 + 2 = -12 + 10 + 2 = 0$. On peut donc factoriser $x - 2$.

$P(x) = (x - 2)(ax + b)$ puisque $P(x)$ est un polynôme du 2nd degré.

a) Méthode rapide :

$$P(x) = (x-2)(ax+b) , \begin{cases} \text{impose } a = -3 \text{ , pour obtenir pour monôme du 2}^{\text{nd}} \text{ degré } -3x^2 \\ \text{impose } b = -1 \text{ , pour obtenir pour monôme constant } +2 \end{cases} .$$

On déduit $P(x) = (x - 2)(-3x - 1)$, pour tout x réel.

b) Méthode intermédiaire :

$P(x) = (x - 2)(ax + b) = \mathbf{a}x(x - 2) + \mathbf{b}(x - 2) = \mathbf{-3}x^2 + 5x + \mathbf{2}$.

On voit clairement que $a = -3$, pour assurer $-3x^2$ et $b = -1$, pour assurer $+ 2$.

On obtient bien $P(x) = (x - 2)(-3x - 1)$.

c) Méthode détaillée (dite par *identification*) Même coefficient pour chaque degré :

$P(x) = (x - 2)(ax + b) \Leftrightarrow -3x^2 + 5x + 2 = ax^2 + bx - 2ax - 2b$,

$-3x^2 + 5x + 2 = ax^2 + (b - 2a)x - 2b$, pour tout x réel , après développement.

Deux polynômes sont partout égaux (pour tout x réel), si et seulement si ils ont les mêmes coefficients aux mêmes puissances de x .

Cette méthode est appelée : Identification des polynômes. ← à mémoriser

On déduit $\mathbf{a = -3}$, $-2b = 2 \Leftrightarrow \mathbf{b = -1}$, et terme vérificateur : $b - 2a = -1 + 6 = +5$.

On obtient bien $P(x) = (x - 2)(-3x - 1)$.

La méthode par identification est applicable aux équations de degré supérieur à 2 .

Exemple : **Résoudre** $\mathbf{2x^3 - x^2 - 22x - 24 = 0}$:

On cherche une racine évidente (rarement en dehors de -2 , -1 , 1 , 2) , les calculs devenant vite compliqués. Ici on trouve $P(-2) = 0$, donc $x + 2$ factorisable.

$2x^3 - x^2 - 22x - 24 = (x + 2)(ax^2 + bx + c)$,

$2x^3 - x^2 - 22x - 24 = ax^3 + (b + 2a)x^2 + (c + 2b)x + 2c$, $\forall x$ réel.

On identifie les coefficients des 4 degrés :

$$\left\{\begin{array}{c} a = +2 \\ b + 2a = -1 \\ c + 2b = -22 \\ 2c = -24 \end{array}\right\} \Rightarrow a = +2 \text{ , } b = -5 \text{ , } c = -12 \text{ (terme vérificateur : } c + 2b = -22) \text{ .}$$

On déduit $P(x) = (x + 2)(2x^2 - 5x - 12)$.

$$P(x) = 0 \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = -2 \\ 2x^2 - 5x - 12 = 0 \Leftrightarrow x = -\dfrac{3}{2} \text{ et } x = +4 \end{array}\right. .$$

On déduit : $S = \{-2 \text{ ; } -\frac{3}{2} \text{ ; } +4\}$.