Equations du 1er Degré ou s'y rattachant.

A : Binôme du 1er degré en x :

C'est une expression se ramenant à la forme $ax + b = 0$, avec a, b réels.

$ax + b = 0 \Leftrightarrow ax = -b$ …. Il faut ensuite diviser par a , ce qui n'est possible que si a n'est pas nul (cas particulier – voir plus loin).

a) Si $a \neq 0$: $ax = -b \Leftrightarrow x = -\frac{b}{a}$, valeur de x solution unique de l'équation.

Racine du binôme $ax + b$ du 1er degré :

***Je mémorise* : 1er degré $\rightarrow$ $-\frac{b}{a}$.**

Si $a \neq 0$: $ax + b = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{b}{a}$, appelé racine de l'équation,

Exemples :

$2x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-(-3)}{2} = +\frac{3}{2}$. *On vérifie* $2(\frac{3}{2}) - 3 = \frac{6}{2} - 3 = 3 - 3 = 0$.

$\frac{x}{3} - 2 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-(-2)}{\frac{1}{3}} = 2\times\frac{3}{1} = +6$.

Remarque : Si une expression est nulle, son triple l'est également.

$\frac{x}{3} - 2 = 0 \Leftrightarrow x - 6 = 0 \Leftrightarrow x = +6$.

$5x + 35 = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{35}{5} \Leftrightarrow x = -7$.

Remarque : Si une expression est nulle, son cinquième l'est également.

$5x + 35 = 0 \Leftrightarrow x + 7 = 0 \Leftrightarrow x = -7$.

Conseil : Simplifier au maximum l'équation, en multipliant ou divisant ses deux membres par un nombre adéquat.

Si $a = 0$: $ax + b = 0 \Leftrightarrow 0.x + b = 0 \Leftrightarrow 0.x = -b$.

Deux sous-cas sont possibles :

$b \neq 0$: $0.x = -b$ n'admet aucune solution x réelle.

Ainsi : $0.x = 4$ ou $0 = 4$ n'est vérifié par aucune valeur de x .

L'ensemble des solutions x est $S = \varnothing$, ensemble vide.

$b = 0$: $0.x = 0$ ou $0 = 0$. Toutes les valeurs de x satisfont l'équation.

L'ensemble des solutions x est $S = \mathbb{R}$, ensemble des réels.

Racine du binôme $ax + b$ du 1er degré : Cas particulier $a = 0$.

$$0x + b = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \text{Si } a = 0 , b \neq 0 : \textit{Aucun x solution} , \ S = \varnothing \\ \text{Si } a = 0 , b = 0 : \textit{Tout } x \textit{ est solution} , \ S = \mathbb{R} \end{cases}$$

Exercice de Synthèse :

Soit l'équation E_m , de paramètre m réel : $(m^2 - 1)\,x + (m^2 + 2m - 3) = 0$.
Discuter, suivant les valeurs du paramètre m , l'existence et la valeur des solutions x .

Remarque : Il s'agit d'une famille paramétrique d'équations, construites suivant un même modèle, qui diffèrent entre elles selon la valeur de m :

E_0 : $-x - 3 = 0$ $\quad$ E_{-2} : $3x - 3 = 0$ $\quad$ $E_{1/2}$: $-\frac{3}{4}x - \frac{7}{4}$.

On traite globalement le cas général $a \neq 0$, puis les cas particuliers $a = 0$.

Pour quelles valeurs de m a-t-on $a = 0$?

$m^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow m^2 = +1 \Leftrightarrow m = -1$ ou $m = +1$.

a) Cas général : $m \neq -1$ et $m \neq +1$, soit $a \neq 0$.

L'équation E_m admet une solution unique $x_m = -\dfrac{b}{a} = -\dfrac{m^2 + 2m - 3}{m^2 - 1}$.

Chaque équation E_m admet sa propre solution, d'où la notation facultative x_m .

On verra plus tard qu'une simplification est possible $x_m = -\dfrac{(m-1)(m+3)}{(m-1)(m+1)} = -\dfrac{m+3}{m+1}$.

Exemples :

$m = 0$, E_0 : $-x - 3 = 0$ admet pour solution $x_0 = -\dfrac{m+3}{m+1} = -3$.

$m = \dfrac{1}{2}$, $E_{1/2}$: $-\dfrac{3}{4}x - \dfrac{7}{4} = 0$ admet pour solution $x_{1/2} = -\dfrac{m+3}{m+1} = -\dfrac{7}{3}$.

b) 1^er cas particulier :

$m = -1$, E_{-1} : $0x - 4 = 0 \Leftrightarrow 0.x = 4$ n'admet pas de solution , $S = \varnothing$.

c) 2^ème cas particulier :

$m = +1$, E_1 : $0x + 0 = 0 \Leftrightarrow 0.x = 0$ admet tout x pour solution , $S = \mathbb{R}$.

Remarque : Il est préférable de noter $0.x = 0$ plutôt que $0 = 0$,
ce qui montre mieux l'absence de x solution de l'équation.