Droites Affines

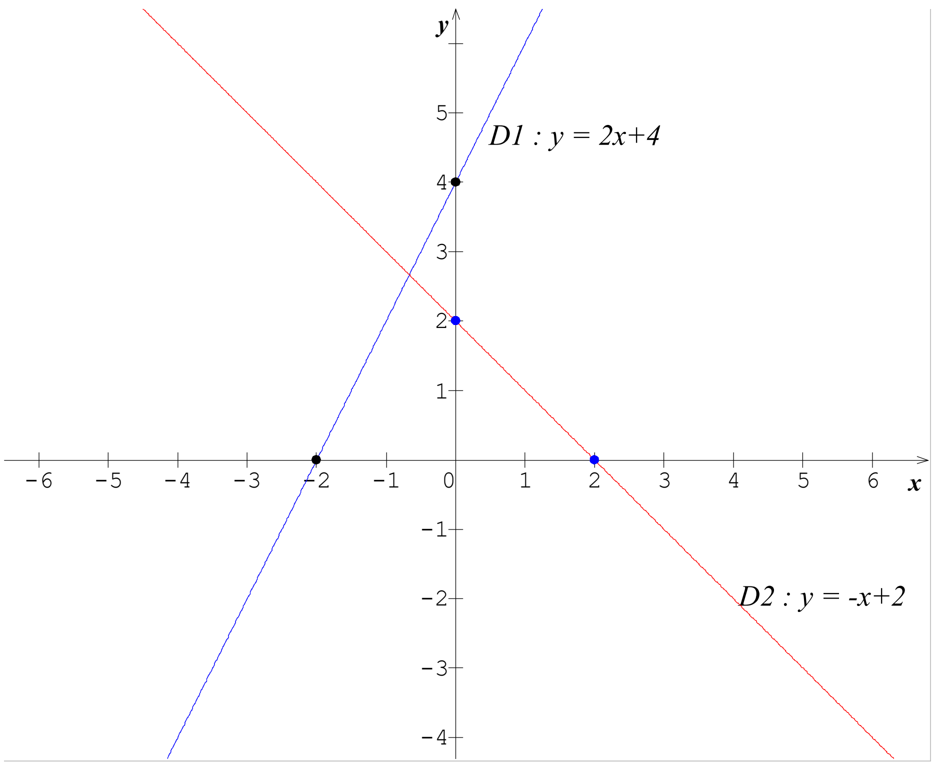
<u>Equation cartésienne *réduite* d'une droite affine du plan</u> :

Soit un repère orthonormé $(O\,;\,\vec{i}\,,\,\vec{j}\,)$.

Tous les points $M(x\,;\,y)$ d'une même droite, <u>non verticale</u>, de ce plan, vérifient une même équation, dite cartésienne, de ;la forme $y = ax + b$, où a et b sont des nombres réels.

$$\mathbf{M(x\,;\,y) \in D \Leftrightarrow y = ax + b} \text{ , avec } \begin{cases} a = \text{pente ou coefficient directeur de } D \\ b = \text{ordonnée de } D \text{ à l'origine} \end{cases} .$$

On note : D : $y = ax + b$



La droite $D_1 : y = 2x + 4$ passe par les points $A(-2\,;\,0)$ et $B(0\,;\,4)$.

Pour passer de A à B l'abscisse croit de $\Delta x = +2$ et l'ordonnée croit de $\Delta y = +4$.

La *pente* est constante tout au long de la droite D_1 , égale à $a = \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{+4}{+2} = +2$.

La <u>*pente*</u>, ou <u>*coefficient directeur*</u>, est la quantité a dont monte ou descend la droite, lorsque l'abscisse augmente d'une unité.

La droite $D_1 : y = 2x + 4$ passe par le point $B(0 ; +4)$. Son ordonnée à l'origine est $b = +4$.

***L'ordonnée à l'origine b* est la hauteur à laquelle la droite passe, au dessus / dessous de l'origine O .**

On retrouve $D_1 : y = ax + b \Leftrightarrow y = 2x + 4$.

La droite $D_2 : y = -x + 2$ passe par les points $B'(2 ; 0)$ et $A'(0 ; 2)$.

Pour passer de B' à A' l'abscisse croit de $\Delta x = +2$ et l'ordonnée décroit de $\Delta y = -2$.

La *pente* est constante tout au long de la droite D_2 , égale à $a' = \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{-2}{+2} = -1$. $(a' = -1)$.

La droite $D_2 : y = -x + 2$ passe par le point $B'(0 ; +2)$. Son ordonnée à l'origine est $b' = +2$. $(b' = +2)$.

On retrouve $D_2 : y = a'x + b' \Leftrightarrow y = -x + 2$.

<u>Justification théorique de</u> $\boldsymbol{a = \dfrac{\Delta y}{\Delta x}}$ <u>, pente de valeur constante, sur toute la droite</u> D : $\boldsymbol{y = ax + b}$:

Soit un point fixe $A_0(x_0 ; y_0)$ appartenant à la droite D , d'où $y_0 = ax_0 + b$.

Soit un point mobile $M(x ; y)$ appartenant à la droite D , d'où $y = ax + b$.

Pour passer de A_0 à M , on avance (algébriquement) de $\Delta x = x - x_0$, et on monte ou descend (algébriquement) de $\Delta y = y - y_0$.

On déduit : $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{y - y_0}{x - x_0} = \dfrac{(ax + b) - (ax_0 + b)}{x - x_0} = \dfrac{a(x - x_0)}{x - x_0} = a$, pente constante, quel que soit le point M choisi sur D .

Remarque : Que l'on avance ou recule, la *pente* est identique, et ne change pas de signe, erreur courante de croire l'inverse.

$$p = \frac{a}{+1} = \frac{-a}{-1} = a$$. <u>La pente ne change que si l'inclinaison de la droite change</u>.

Remarque : La droite $D : y = ax + b$ est de vecteur directeur $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix} a \\ 1 \end{pmatrix}$.

Si $A(x_0 ; y_0)$ et $M(x ; y)$ appartiennent à D , alors $\overrightarrow{AM} = k\,\overrightarrow{u}$, $\begin{pmatrix} \Delta y \\ \Delta x \end{pmatrix} = k.\begin{pmatrix} a \\ 1 \end{pmatrix}$,

avec $k = x - x_0$.

Exemple : **Soit A(-1 ; 3) et B(2 ; 0) . Déterminer une équation cartésienne de la droite D_{AB} .**

Soit $y = ax + b$ une équation cartésienne de D_{AB} .

$a = \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \dfrac{0-3}{2-(-1)} = \dfrac{-3}{3} \Rightarrow a = -1$. La droite D_{AB} s'écrit $y = -x + b$.

$A(-1 ; 3) \in D_{AB} \Leftrightarrow y_A = -x_A + b \Leftrightarrow 3 = -1(-1) + b$, soit $b = +2$.

On déduit $D_{AB} : y = -x + 2$.

Droites particulières :

Si $a \neq 0$, la droite D a une inclinaison non nulle, c'est une droite *oblique* , $y = ax + b$.

Si $a = 0$, la droite D a une inclinaison nulle, c'est une droite horizontale d'ordonnée $y = b$.

Les droites verticales n'admettent pas d'équation réduite de type $y = ax + b$.

En effet, une droite verticale est caractérisée par une abscisse $x = k$ commune à tous ses points, soit D : $x = k$.

Dans $y = ax + b$, on ne peut pas supprimer y , donc cette écriture ne convient pas aux verticales.

On verra plus tard que seule l'équation cartésienne générale D : $Ax + By + C = 0$, permet d'écrire tous les types de droites sous une même formule.

$3x + 2y + 1 = 0 \Leftrightarrow y = -\dfrac{3}{2}x - \dfrac{1}{3}$, droite oblique.

$\mathbf{0}x + 2y - 4 = 0 \Leftrightarrow y = 2$, droite horizontale.

$2x + \mathbf{0}y + 6 = 0 \Leftrightarrow x = -3$, droite verticale.

Droites parallèles

Deux droites parallèles ont même coefficient directeur (pente)

$D \,//\, D' \Leftrightarrow a = a'$

Soit la droite $D : y = 2x + 1$.

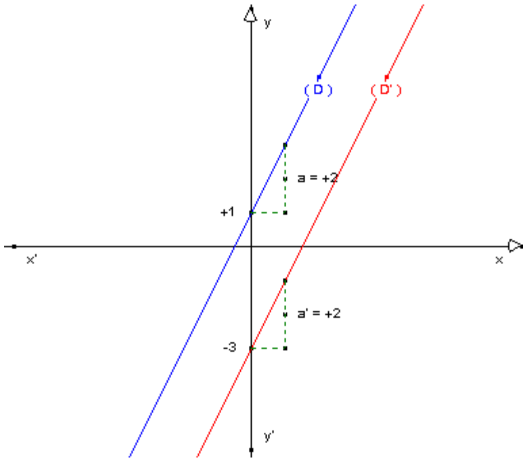
Recherchons l'équation de (D') parallèle à (D) et passant par le point $A(+1 ; -1)$:

On pose $D' : y = a'x + b'$. Comme $D' // D$, elles ont même coefficient directeur, soit $a' = a = +2$.

(D') a donc une équation cartésienne de la forme $D' : y = 2x + b'$.

Comme $A(+1 ; -1) \in (D')$, il satisfait son équation : $y = 2x + b' \Leftrightarrow -1 = 2\,(1) + b' \Leftrightarrow b' = -3$.

L'équation de (D') est donc $D' : y = 2x - 3$.



Droites perpendiculaires

Deux droites perpendiculaires ont des coefficients directeurs dont le produit est - 1

$$D \perp D' \Leftrightarrow a \times a' = -1$$

Soit la droite $D : y = 2x + 1$.

Recherchons l'équation de (D') perpendiculaire à (D) et passant par $B(+2 ; -1)$:

On pose $D' : y = a'x + b'$. $D' \perp D$, donc leurs coefficients directeurs vérifiant : $a \times a' = -1$.

$a' = -\frac{1}{a} = -\frac{1}{2}$. (D') a une équation cartésienne de la forme $D' : y = -\frac{1}{2}x + b'$.

Comme $B(+2 ; -1) \in (D')$, ce point satisfait à son équation : $y = -\frac{1}{2}x + b'$

D'où : $-1 = -\frac{1}{2}\times(2) + b' \Leftrightarrow b' = 0$,

L'équation cherchée est D' : $y = -\frac{1}{2}x$, droite qui passe par l'origine O, puisque son équation est de forme $y = ax$ (forme linéaire) .