Il peut être profitable de revenir à des méthodes apprises au collège, pour mieux en comprendre la justification, se voir rappeler les moyens de mémorisation, et ensuite déboucher sur les méthodes et techniques enseignées au lycée.

Droites Affines

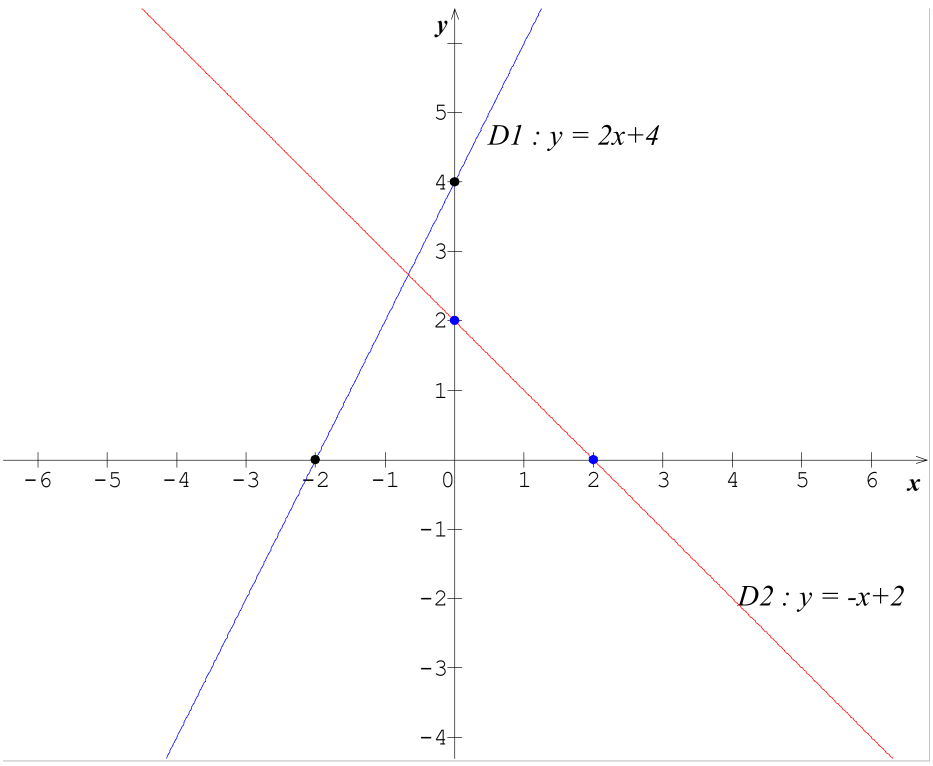
<u>Equation cartésienne *réduite* d'une droite affine du plan</u> :

Soit un repère orthonormé $(O\ ;\ \vec{i},\ \vec{j})$.

Tous les points $M(x\ ;\ y)$ d'une même droite, <u>non verticale</u>, de ce plan, vérifient une même équation, dite cartésienne, de ;la forme $y = ax + b$, où a et b sont des nombres réels.

$$M(x\ ;\ y) \in D \iff y = ax + b \text{ , avec } \begin{cases} a = \text{pente ou coefficient directeur de } D \\ b = \text{ordonnée de } D \text{ à l'origine} \end{cases} .$$

On note : $D : y = ax + b$



La droite $D_1 : y = 2x + 4$ passe par les points $A(-2\ ;\ 0)$ et $B(0\ ;\ 4)$.

Pour passer de A à B l'abscisse croit de $\Delta x = +2$ et l'ordonnée croit de $\Delta y = +4$.

La *pente* est constante tout au long de la droite D_1, égale à $a = \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{+4}{+2} = +2$.

La *pente*, ou *coefficient directeur*, est la quantité a dont monte ou descend la droite, lorsque l'abscisse augmente d'une unité.

La droite $D_1 : y = 2x + 4$ passe par le point B(0 ; +4). Son ordonnée à l'origine est $b = +4$.

L'ordonnée à l'origine b **est la hauteur à laquelle la droite passe, au dessus / dessous de l'origine O .**

On retrouve $D_1 : y = ax + b \Leftrightarrow y = 2x + 4$.

La droite $D_2 : y = -x + 2$ passe par les points B'(2 ; 0) et A'(0 ; 2) .

Pour passer de B' à A' l'abscisse croit de $\Delta x = +2$ et l'ordonnée décroit de $\Delta y = -2$.

La *pente* est constante tout au long de la droite D_2, égale à $a' = \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{-2}{+2} = -1$. $(a' = -1)$.

La droite $D_2 : y = -x + 2$ passe par le point B'(0 ; +2). Son ordonnée à l'origine est $b' = +2$. $(b' = +2)$.

On retrouve $D_2 : y = a'x + b' \Leftrightarrow y = -x + 2$.

<u>Justification théorique de</u> $a = \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ <u>, pente de valeur constante, sur toute la droite</u> D : $y = ax + b$:

Soit un point fixe $A_0(x_0 ; y_0)$ appartenant à la droite D , d'où $y_0 = ax_0 + b$.

Soit un point mobile $M(x ; y)$ appartenant à la droite D , d'où $y = ax + b$.

Pour passer de A_0 à M , on avance (algébriquement) de $\Delta x = x - x_0$, et on monte ou descend (algébriquement) de $\Delta y = y - y_0$.

On déduit : $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{y - y_0}{x - x_0} = \dfrac{(ax + b) - (ax_0 + b)}{x - x_0} = \dfrac{a(x - x_0)}{x - x_0} = a$, pente constante, quel que soit le point M choisi sur D .

Remarque : Que l'on avance ou recule, la *pente* est identique, et ne change pas de signe, erreur courante de croire l'inverse.

$$p = \frac{a}{+1} = \frac{-a}{-1} = a .$$ <u>La pente ne change que si l'inclinaison de la droite change</u>.

Remarque : La droite D : $y = ax + b$ est de vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix} a \\ 1 \end{pmatrix}$.

Si $A(x_0 ; y_0)$ et $M(x ; y)$ appartiennent à D , alors $\overrightarrow{AM} = k\,\vec{u}$, $\begin{pmatrix} \Delta y \\ \Delta x \end{pmatrix} = k.\begin{pmatrix} a \\ 1 \end{pmatrix}$,

avec $k = x - x_0$.

Exemple : **Soit A(-1 ; 3) et B(2 ; 0) . Déterminer une équation cartésienne de la droite D_{AB} .**

Soit $y = ax + b$ une équation cartésienne de D_{AB} .

$a = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{0-3}{2-(-1)} = \frac{-3}{3} \Rightarrow a = -1$. La droite D_{AB} s'écrit $y = -x + b$.

$A(-1\ ;\ 3) \in D_{AB} \Leftrightarrow y_A = -x_A + b \Leftrightarrow 3 = -1(-1) + b$, soit $b = +2$.

On déduit $D_{AB} : y = -x + 2$.

Droites particulières :

Si $a \neq 0$, la droite D a une inclinaison non nulle, c'est une droite *oblique* , $y = ax + b$.

Si $a = 0$, la droite D a une inclinaison nulle, c'est une droite horizontale d'ordonnée $y = b$.

Les droites verticales n'admettent pas d'équation réduite de type $y = ax + b$.

En effet, une droite verticale est caractérisée par une abscisse $x = k$ commune à tous ses points, soit D : $x = k$.

Dans $y = ax + b$, on ne peut pas supprimer y , donc cette écriture ne convient pas aux verticales.

On verra plus tard que seule l'équation cartésienne générale D : $Ax + By + C = 0$, permet d'écrire tous les types de droites sous une même formule.

$3x + 2y + 1 = 0 \Leftrightarrow y = -\frac{3}{2}x - \frac{1}{3}$, droite oblique.

$\mathbf{0}x + 2y - 4 = 0 \Leftrightarrow y = 2$, droite horizontale.

$2x + \mathbf{0}y + 6 = 0 \Leftrightarrow x = -3$, droite verticale.

Droites parallèles

Deux droites parallèles ont même coefficient directeur (pente)

$$D \mathbin{/\!/} D' \Leftrightarrow a = a'$$

Soit la droite $D : y = 2x + 1$.

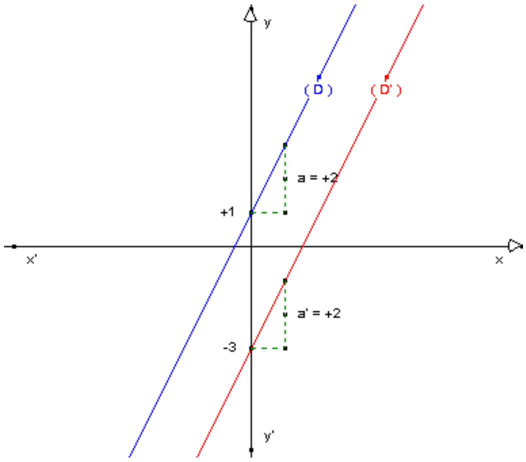
Recherchons l'équation de (D') parallèle à (D) et passant par le point $A(+1\ ;\ -1)$:

On pose $D' : y = a'x + b'$. Comme $D' \mathbin{/\!/} D$, elles ont même coefficient directeur, soit $a' = a = +2$.

(D') a donc une équation cartésienne de la forme $D' : y = 2x + b'$.

Comme $A(+1\ ;\ -1) \in (D')$, il satisfait son équation : $y = 2x + b' \Leftrightarrow -1 = 2(1) + b' \Leftrightarrow b' = -3$.

L'équation de (D') est donc $D' : y = 2x - 3$.



Droites perpendiculaires

Deux droites perpendiculaires ont des coefficients directeurs dont le produit est - 1

$$D \perp D' \Leftrightarrow a \times a' = -1$$

Soit la droite $D : y = 2x + 1$.

Recherchons l'équation de (D') perpendiculaire à (D) et passant par $B(+2 \,;\, -1)$:

On pose $D' : y = a'x + b'$. $D' \perp D$, donc leurs coefficients directeurs vérifiant : $a \times a' = -1$.

$a' = -\frac{1}{a} = -\frac{1}{2}$. ($D'$) a une équation cartésienne de la forme $D' : y = -\frac{1}{2}x + b'$.

Comme $B(+2 \,;\, -1) \in (D')$, ce point satisfait à son équation : $y = -\frac{1}{2}x + b'$

D'où : $-1 = -\frac{1}{2}\times(2) + b' \Leftrightarrow b' = 0$,

L'équation cherchée est $D' :\ y = -\frac{1}{2}x$, droite qui passe par l'origine O , puisque son équation est de forme $y = ax$ (forme linéaire) .